Algèbre linéaire

A. Blouza
email : Adel.Blouza@univ-rouen.fr

bureau : M1.29

Université de Rouen

Semestre S2, Janvier–Mai 2011

Plan du cours

1. Systèmes linéaires
2. Vecteurs dans $\mathbb{R}^m$
3. Sous–espaces vectoriels de $\mathbb{R}^m$
4. Applications linéaires
5. Algèbre matricielle
6. Déterminants
7. Réduction de matices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1. Une *équation linéaire* à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de la forme

Chapitre 1 : Systèmes linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1. Une *équation linéaire* à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et b sont des nombres réels donnés.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1. Une *équation linéaire* à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et b sont des nombres réels donnés.

Définition

Chapitre 1 : Systèmes linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1. Une *équation linéaire* à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et b sont des nombres réels donnés.

Définition

Un système de m équations linéaires à n inconnues, ou système linéaire, est une liste de m équations linéaires.

Chapitre 1 : Systèmes linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1. Une *équation linéaire* à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et b sont des nombres réels donnés.

Définition

Un système de m équations linéaires à n inconnues, ou système linéaire, est une liste de m équations linéaires.

Exemple. Système de 2 équations à 3 inconnues.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= 8, \\ x_1 \qquad\quad - 4x_3 &= -7. \end{cases}$$

Système linéaire

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{ \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right.$$

Système linéaire

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{array} \right.$$

Système linéaire

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{array}\right.$$

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{array}\right.$$

Système linéaire

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & &
\end{array}\right.$$

Système linéaire

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.$$

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Les nombres réels $a_{ij}, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$ sont les *coefficients* du système. Ce sont des données. Les nombres réels $b_i, i = 1, \cdots, m$ constituent le *second membre* du système et sont également des données.

Définition

Définition

Une solution *du système linéaire est une liste de n nombres réels* $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ *(un n–uplet) tels que si l'on substitue* s_1 *pour* x_1, s_2 *pour* x_2, *etc ... dans le système linéaire, on obtient une égalité.*
L'ensemble des solutions du système linéaire est l'ensemble de tous ces n–uplets.

Définition

Une solution du système linéaire est une liste de n nombres réels $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ (un n–uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, etc ... dans le système linéaire, on obtient une égalité.
L'ensemble des solutions du système linéaire est l'ensemble de tous ces n–uplets.

Pour un système linéaire général de m équations et n inconnues :

Définition

Une solution du système linéaire est une liste de n nombres réels $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ (un n–uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, etc ... dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'ensemble des solutions du système linéaire est l'ensemble de tous ces n–uplets.

Pour un système linéaire général de m équations et n inconnues :

a) Soit il n'y a aucune solution. Dans ce cas on dit que le système est *incompatible*.

Définition

Une solution du système linéaire est une liste de n nombres réels $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ (un n–uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, etc ... dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'ensemble des solutions du système linéaire est l'ensemble de tous ces n–uplets.

Pour un système linéaire général de m équations et n inconnues :

a) Soit il n'y a aucune solution. Dans ce cas on dit que le système est *incompatible*.

b) Soit il y a une solution unique. Dans ce cas on dit que le système est *compatible*.

Définition

Une solution du système linéaire est une liste de n nombres réels $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ *(un n–uplet) tels que si l'on substitue* s_1 *pour* x_1, s_2 *pour* x_2*, etc ... dans le système linéaire, on obtient une égalité.*
L'ensemble des solutions du système linéaire est l'ensemble de tous ces n–uplets.

Pour un système linéaire général de m équations et n inconnues :

a) Soit il n'y a aucune solution. Dans ce cas on dit que le système est *incompatible*.

b) Soit il y a une solution unique. Dans ce cas on dit que le système est *compatible*.

c) Soit il y a une infinités de solutions. Dans ce cas aussi on dit que le système est *compatible*.

Définition

Définition

- *Un système est dit homogène si son second membre est nul, c'est–à–dire si* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Définition

- *Un système est dit homogène si son second membre est nul, c'est–à–dire si* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.
- *Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Définition

- *Un système est dit homogène si son second membre est nul, c'est–à–dire si* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.
- *Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Remarque. Un système homogène est toujours compatible. En effet, un tel système admet toujours la solution *triviale* $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

Exemples.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0, \\ x_2 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

Définition

- *Un système est dit homogène si son second membre est nul, c'est–à–dire si* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.
- *Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Remarque. Un système homogène est toujours compatible. En effet, un tel système admet toujours la solution *triviale* $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

Exemples.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0, \\ x_2 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ est Solution.

Définition

- *Un système est dit homogène si son second membre est nul, c'est–à–dire si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.*
- *Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Remarque. Un système homogène est toujours compatible. En effet, un tel système admet toujours la solution *triviale* $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

Exemples.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0, \\ x_2 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ est Solution.

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_6 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

Définition

- *Un système est dit homogène si son second membre est nul, c'est–à–dire si* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.
- *Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Remarque. Un système homogène est toujours compatible. En effet, un tel système admet toujours la solution *triviale* $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

Exemples.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0, \\ x_2 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ est Solution.

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_6 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ est Solution.

Notations matricielles

$$A =$$

Notations matricielles

$$A = \left(\right.$$

Notations matricielles

$$A = \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right.$$

Notations matricielles

$$A = \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right.$$

Notations matricielles

$$A = \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right.$$

Notations matricielles

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notations matricielles

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elle permet d'écrire de façon plus compacte un système linéaire. Il s'agit de ranger les coefficients dans des tableaux rectangulaires.

Notations matricielles

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elle permet d'écrire de façon plus compacte un système linéaire. Il s'agit de ranger les coefficients dans des tableaux rectangulaires. Le tableau A s'appelle la *matrice* du système linéaire. Elle a m lignes et n colonnes, c'est une matrice $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elle permet d'écrire de façon plus compacte un système linéaire. Il s'agit de ranger les coefficients dans des tableaux rectangulaires. Le tableau A s'appelle la *matrice* du système linéaire. Elle a m lignes et n colonnes, c'est une matrice $m \times n$.

Exemple.

On introduit

$$\widetilde{A} =$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La matrice $\widetilde{A}$ s'appelle *matrice augmentée* du système. C'est une matrice $m \times (n+1)$. Elle contient toute l'information nécessaire à déterminer le système, les coefficients et le second membre.

On introduit

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La matrice $\widetilde{A}$ s'appelle *matrice augmentée* du système. C'est une matrice $m \times (n+1)$. Elle contient toute l'information nécessaire à déterminer le système, les coefficients et le second membre.

Exemple.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définitions

Systèmes échelonnés

Définitions

Définitions

1) *Une matrice est dite échelonnée* **si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*

Définitions

1) *Une matrice est dite échelonnée* **si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*

   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en–dessous sont également entièrement nulles.*

Définitions

1) *Une matrice est dite échelonnée* **si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*
   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en–dessous sont également entièrement nulles.*
   b) *Dans chaque ligne non entièrement nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul en comptant à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*

Systèmes échelonnés

Définitions

1) *Une matrice est dite échelonnée* **si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*
   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en–dessous sont également entièrement nulles.*
   b) *Dans chaque ligne non entièrement nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul en comptant à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*
2) *Une matrice est dite échelonnée réduite* **si, et seulement si** *en plus des deux propriétés a) et b) elle satisfait les deux propriétés suivantes :*

Systèmes échelonnés

Définitions

1) *Une matrice est dite échelonnée* **si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*
   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en–dessous sont également entièrement nulles.*
   b) *Dans chaque ligne non entièrement nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul en comptant à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*
2) *Une matrice est dite échelonnée réduite* **si, et seulement si** *en plus des deux propriétés a) et b) elle satisfait les deux propriétés suivantes :*
   i) *Le premier coefficient non nul d'une ligne en comptant à partir de la gauche vaut* 1.

Systèmes échelonnés

Définitions

1) *Une matrice est dite échelonnée* **si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*
   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en–dessous sont également entièrement nulles.*
   b) *Dans chaque ligne non entièrement nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul en comptant à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*
2) *Une matrice est dite échelonnée réduite* **si, et seulement si** *en plus des deux propriétés a) et b) elle satisfait les deux propriétés suivantes :*
   i) *Le premier coefficient non nul d'une ligne en comptant à partir de la gauche vaut* 1.
   ii) *Et c'est le* **seul** *élément non nul de sa colonne.*

Définitions

1) *Une matrice est dite* *échelonnée* **si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*
   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en–dessous sont également entièrement nulles.*
   b) *Dans chaque ligne non entièrement nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul en comptant à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*
2) *Une matrice est dite échelonnée* *réduite* **si, et seulement si** *en plus des deux propriétés a) et b) elle satisfait les deux propriétés suivantes :*
   i) *Le premier coefficient non nul d'une ligne en comptant à partir de la gauche vaut* 1.
   ii) *Et c'est le* **seul** *élément non nul de sa colonne.*

Les systèmes linéaires dont la matrice augmentée est échelonnée sont appelés *systèmes échelonnés*.

Définitions

1) *Une matrice est dite échelonnée* **si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*

   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en–dessous sont également entièrement nulles.*

   b) *Dans chaque ligne non entièrement nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul en comptant à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*

2) *Une matrice est dite échelonnée réduite* **si, et seulement si** *en plus des deux propriétés a) et b) elle satisfait les deux propriétés suivantes :*

   i) *Le premier coefficient non nul d'une ligne en comptant à partir de la gauche vaut* 1.

   ii) *Et c'est le* **seul** *élément non nul de sa colonne.*

Les systèmes linéaires dont la matrice augmentée est échelonnée sont appelés *systèmes échelonnés*. **Exemples.**

Définition

Définition

Soit B une matrice échelonnée réduite. Les positions de pivot de B sont les emplacements (au sens couple(numéro de ligne, numéro de colonne)) des coefficients valant 1.

Définition

Soit B une matrice échelonnée réduite. Les positions de pivot de B sont les emplacements (au sens couple(numéro de ligne, numéro de colonne)) des coefficients valant 1.

Exemples.

Définition

Définition

Soit B une matrice échelonnée réduite. Les positions de pivot de B sont les emplacements (au sens couple(numéro de ligne, numéro de colonne)) des coefficients valant 1.

Exemples.

Définition

Les inconnues correspondant à une colonne contenant le pivot sont appelées variables essentielles (ou liées). Les autres sont appelées variables libres.

Définition

Soit B une matrice échelonnée réduite. Les positions de pivot de B sont les emplacements (au sens couple(numéro de ligne, numéro de colonne)) des coefficients valant 1.

Exemples.

Définition

Les inconnues correspondant à une colonne contenant le pivot sont appelées variables essentielles (ou liées). Les autres sont appelées variables libres.

Exemples.

Théorème

Dans le cas d'un système échelonné $m \times n$ on a l'alternative :

Théorème

Dans le cas d'un système échelonné $m \times n$ on a l'alternative :

a) *Soit il n'y a aucune solution si la matrice augmentée a une ligne de la forme*

$$(0\ 0\ \cdots\ 0\ b) \text{ avec } b \neq 0. \tag{1}$$

Théorème

Dans le cas d'un système échelonné $m \times n$ on a l'alternative :

a) *Soit il n'y a aucune solution si la matrice augmentée a une ligne de la forme*

$$(0\ 0\ \cdots\ 0\ b) \text{ avec } b \neq 0. \tag{1}$$

b) *Soit il y a une unique solution s'il n'y a pas de ligne de la forme de* (1) **ni** *de variables libres.*

Théorème

Dans le cas d'un système échelonné $m \times n$ on a l'alternative :

a) *Soit il n'y a aucune solution si la matrice augmentée a une ligne de la forme*

$$(0\ 0\ \cdots\ 0\ b) \text{ avec } b \neq 0. \tag{1}$$

b) *Soit il y a une unique solution s'il n'y a pas de ligne de la forme de* (1) **ni** *de variables libres.*

c) *Soit il y a une infinité de solutions s'il n'y a pas de ligne de la forme de* (1) **mais** *qu'il existe des variables libres.*

Théorème

Dans le cas d'un système échelonné $m \times n$ on a l'alternative :

a) *Soit il n'y a aucune solution si la matrice augmentée a une ligne de la forme*

$$(0\ 0\ \cdots\ 0\ b) \text{ avec } b \neq 0. \tag{1}$$

b) *Soit il y a une unique solution s'il n'y a pas de ligne de la forme de* (1) **ni** *de variables libres.*

c) *Soit il y a une infinité de solutions s'il n'y a pas de ligne de la forme de* (1) **mais** *qu'il existe des variables libres.*

Dans le cas de système échelonné compatible, on obtient une description paramétrique de l'ensemble des solutions en exprimant les variables essentielles en fonctions du second membre et des variables libres.

A partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

A partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition

A partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :

L'algorithme de Gauss

A partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :

i) *Echanger deux lignes (échange).*

A partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :

i) *Echanger deux lignes (échange).*

ii) *Multiplier une ligne par une constante non nulle (homotéthie).*

L'algorithme de Gauss

A partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :

i) *Echanger deux lignes (échange).*

ii) *Multiplier une ligne par une constante non nulle (homotéthie).*

iii) *Remplacer une ligne par elle–même plus un multiple d'une autre ligne (substitution).*

A partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :

i) *Echanger deux lignes (échange).*

ii) *Multiplier une ligne par une constante non nulle (homotéthie).*

iii) *Remplacer une ligne par elle–même plus un multiple d'une autre ligne (substitution).*

Remarques. a) On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire si on applique une ou plusieurs opérations élémentaires à sa matrice augmentée.

A partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :

i) *Echanger deux lignes (échange).*

ii) *Multiplier une ligne par une constante non nulle (homotéthie).*

iii) *Remplacer une ligne par elle–même plus un multiple d'une autre ligne (substitution).*

Remarques. a) On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire si on applique une ou plusieurs opérations élémentaires à sa matrice augmentée.
b) En effectuant une opération élementaire on NE mélange JAMAIS les colonnes.

L'algorithme de Gauss

A partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :

i) *Echanger deux lignes (échange).*

ii) *Multiplier une ligne par une constante non nulle (homotéthie).*

iii) *Remplacer une ligne par elle–même plus un multiple d'une autre ligne (substitution).*

Remarques. a) On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire si on applique une ou plusieurs opérations élémentaires à sa matrice augmentée.
b) En effectuant une opération élementaire on NE mélange JAMAIS les colonnes. **Exemples.**

Algorithme de Gauss

Le principe de l'algorithme de Gauss consiste à utiliser des substitutions de lignes pour placer des zéros là où il faut de façon à créer une forme échelonnée.

Algorithme de Gauss

Le principe de l'algorithme de Gauss consiste à utiliser des substitutions de lignes pour placer des zéros là où il faut de façon à créer une forme échelonnée. Soit A une matrice $m \times n$ quelconque.

Le principe de l'algorithme de Gauss consiste à utiliser des substitutions de lignes pour placer des zéros là où il faut de façon à créer une forme échelonnée. Soit A une matrice $m \times n$ quelconque.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les pivots

Les pivots

Etape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne.

Etape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros,

Les pivots

Etape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3.

Les pivots

Etape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

Les pivots

Etape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

reste inchangée.

Etape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

reste inchangée.

Soit la première colonne contient au moins un terme non nul.

Etape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

reste inchangée.
Soit la première colonne contient au moins un terme non nul. On choisit un tel terme que l'on appelle *pivot*.

Etape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

reste inchangée.
Soit la première colonne contient au moins un terme non nul. On choisit un tel terme que l'on appelle *pivot*. Si c'est le terme a_{11} on passe directement à l'étape 2,

Etape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

reste inchangée.
Soit la première colonne contient au moins un terme non nul. On choisit un tel terme que l'on appelle *pivot*. Si c'est le terme a_{11} on passe directement à l'étape 2, si c'est le terme a_{i1} avec $i \neq 1$ on échange les lignes 1 et i et on passe à l'étape 2.

Etape 2

Etape 2

Dans ce cas, à l'issue de l'étape 1 la matrice A devient

Dans ce cas, à l'issue de l'étape 1 la matrice A devient

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mj} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

avec $a'_{11} \neq 0$.

Elimination

Etape 2. **Elimination.** On NE touche PLUS à la ligne 1 et on se sert du pivot pour éliminer tous les termes a'_{i1} pour $i \geq 2$.

Etape 2. **Elimination.** On NE touche PLUS à la ligne 1 et on se sert du pivot pour éliminer tous les termes a'_{i1} pour $i \geq 2$. Pour cela on remplace la ligne i de la façon suivante.

Elimination

Etape 2. **Elimination.** On NE touche PLUS à la ligne 1 et on se sert du pivot pour éliminer tous les termes a'_{i1} pour $i \geq 2$. Pour cela on remplace la ligne i de la façon suivante.

$$\text{ligne } i - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times \text{ligne } 1 \qquad \text{pour } i = 2, \cdots, m.$$

Etape 2. **Elimination.** On NE touche PLUS à la ligne 1 et on se sert du pivot pour éliminer tous les termes a'_{i1} pour $i \geq 2$. Pour cela on remplace la ligne i de la façon suivante.

$$\text{ligne } i - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times \text{ligne } 1 \qquad \text{pour } i = 2, \cdots, m.$$

Au terme de l'étape 2 on obtient une matrice de la forme

$$A'' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{m2} & \cdots & a''_{mj} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

Etape 2. **Elimination.** On NE touche PLUS à la ligne 1 et on se sert du pivot pour éliminer tous les termes a'_{i1} pour $i \geq 2$. Pour cela on remplace la ligne i de la façon suivante.

$$\text{ligne } i - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times \text{ligne } 1 \qquad \text{pour } i = 2, \cdots, m.$$

Au terme de l'étape 2 on obtient une matrice de la forme

$$A'' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{m2} & \cdots & a''_{mj} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

où $a''_{ij} = a'_{ij} - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times a'_{ij}$.

Boucle

Etape 3. **Boucle.** La première colonne de la matrice A'' est bien celle d'une matrice échelonnée.

Etape 3. **Boucle.** La première colonne de la matrice A'' est bien celle d'une matrice échelonnée. On va donc conserver cette première colonne ainsi que la première ligne, Etape 3. **Boucle.** La première colonne de la matrice A'' est bien celle d'une matrice échelonnée. On va donc conserver cette première colonne ainsi que la première ligne, et l'on va boucler sur l'étape 1 appliquée à la sous–matrice de taille $(m-1) \times (n-1)$

Etape 3. **Boucle.** La première colonne de la matrice A'' est bien celle d'une matrice échelonnée. On va donc conserver cette première colonne ainsi que la première ligne, et l'on va boucler sur l'étape 1 appliquée à la sous–matrice de taille $(m-1) \times (n-1)$

$$\begin{pmatrix} a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & & & \\ a''_{m2} & \cdots & a''_{mj} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle on aura une matrice de la forme

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle on aura une matrice de la forme

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle on aura une matrice de la forme

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{lllllll} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle on aura une matrice de la forme

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3n} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle on aura une matrice de la forme

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle on aura une matrice de la forme

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{lllllll} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{in} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle on aura une matrice de la forme

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle on aura une matrice de la forme

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{m3} & \cdots & a^{(3)}_{mj} & \cdots & a^{(3)}_{mn} \end{pmatrix}$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle on aura une matrice de la forme

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{m3} & \cdots & a^{(3)}_{mj} & \cdots & a^{(3)}_{mn} \end{pmatrix}$$

où $a^{(3)}_{ij} = a''_{ij} - \frac{a''_{ij}}{a''_{22}} \times a''_{2j}$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle on aura une matrice de la forme

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{m3} & \cdots & a^{(3)}_{mj} & \cdots & a^{(3)}_{mn} \end{pmatrix}$$

où $a^{(3)}_{ij} = a''_{ij} - \frac{a''_{ij}}{a''_{22}} \times a''_{2j}$ pour $i = 3, \cdots, m$ et $j = 2, \cdots, n$.

Chapitre 2 : Vecteurs dans $\mathbb{R}^m$

Définition

Soit $m \geq 1$ un entier. Un vecteur de $\mathbb{R}^m$ est une matrice à m lignes et 1 colonne.

Définition

Soit $m \geq 1$ un entier. Un vecteur de $\mathbb{R}^m$ est une matrice à m lignes et 1 colonne.

Notations : Un vecteur u de $\mathbb{R}^m$ s'écrit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

Définition

Soit $m \geq 1$ un entier. Un vecteur de $\mathbb{R}^m$ est une matrice à m lignes et 1 colonne.

Notations : Un vecteur u de $\mathbb{R}^m$ s'écrit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

ou par souci de gain de place on utilise la notation d'un m–uplet de scalaires

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \, .$$

Définition

Soit $m \geq 1$ un entier. Un vecteur de $\mathbb{R}^m$ est une matrice à m lignes et 1 colonne.

Notations : Un vecteur u de $\mathbb{R}^m$ s'écrit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

ou par souci de gain de place on utilise la notation d'un m–uplet de scalaires

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m) .$$

Cette notation NE doit PAS être confondue avec la notation $(u_1 \; u_2 \ldots u_m)$ qui désigne une matrice à 1 ligne et m colonnes.

Définition

Soient

Définition

Soient

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

Définition

Soient

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Définition

Soient

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

On définit sur $\mathbb{R}^m$ l'addition de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

Définition

Soient

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

On définit sur $\mathbb{R}^m$ l'addition de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Définition

Soient

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

On définit sur $\mathbb{R}^m$ l'addition de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

On définit sur $\mathbb{R}^m$ la multiplication de $\vec{u}$ par un scalaire λ par

Définition

Soient

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

On définit sur $\mathbb{R}^m$ l'addition de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

On définit sur $\mathbb{R}^m$ la multiplication de $\vec{u}$ par un scalaire λ par

$$\lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Définition

Soient

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

On définit sur $\mathbb{R}^m$ l'addition de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

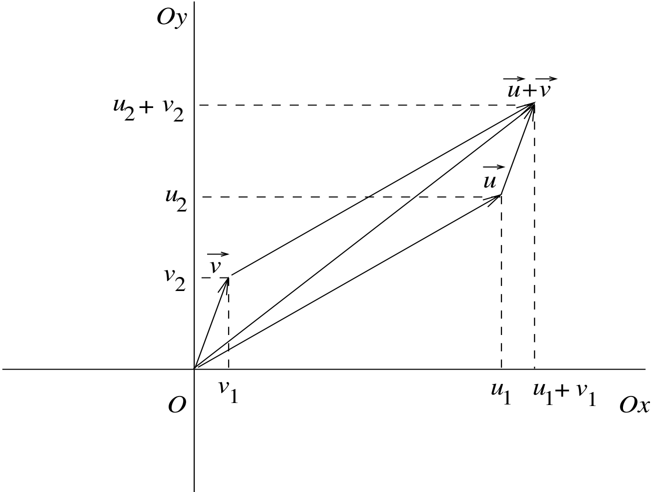
On définit sur $\mathbb{R}^m$ la multiplication de $\vec{u}$ par un scalaire λ par

$$\lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Ces deux opérations sont définies ligne par ligne.

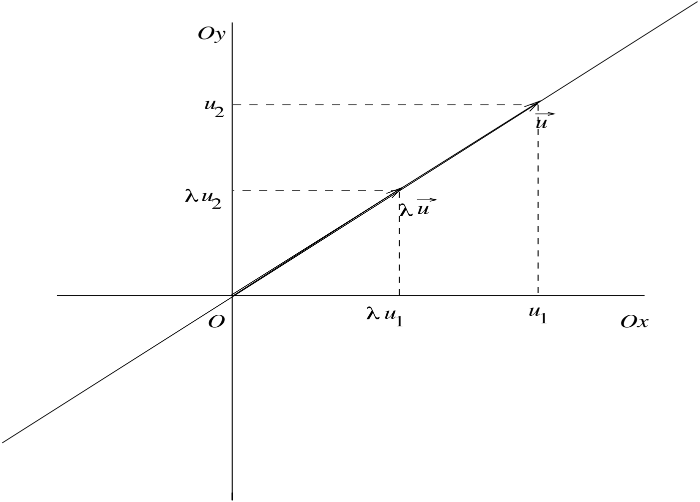
- L'addition de deux vecteurs se traduit par la *règle du parallélogramme*. La somme de deux vecteurs est représentée par la diagonale du parallélogramme ayant ces deux vecteurs comme côtés.

- L'addition de deux vecteurs se traduit par la *règle du parallélogramme*. La somme de deux vecteurs est représentée par la diagonale du parallélogramme ayant ces deux vecteurs comme côtés.



- Par le théorème de Thalès. L'ensemble des multiples scalaires d'un vecteur est la droite qui supporte le segment représentant le vecteur.

- Par le théorème de Thalès. L'ensemble des multiples scalaires d'un vecteur est la droite qui supporte le segment représentant le vecteur.



Structure algébrique de $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$

Structure algébrique de $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$

Grâce aux opérations d'addition et de multiplication, l'ensemble $\mathbb{R}^m$ acquiert une **structure algébrique**, c'est-à-dire des règles de calcul sur les vecteurs.

Grâce aux opérations d'addition et de multiplication, l'ensemble $\mathbb{R}^m$ acquiert une **structure algébrique**, c'est-à-dire des règles de calcul sur les vecteurs.

Définition

Le vecteur

$$\vec{0}_{\mathbb{R}^m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

est appelé le vecteur nul de $\mathbb{R}^m$.

Proposition

Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans $\mathbb{R}^m$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$,

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, *(commutativité de l'addition).*

Proposition

Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans $\mathbb{R}^m$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$,

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, (*commutativité de l'addition*).

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, (*associativité de l'addition*).

Proposition

Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *et* λ, μ *dans* $\mathbb{R}$,

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, (*commutativité de l'addition*).

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, (*associativité de l'addition*).

iii) $\vec{u} + \vec{0}_{\mathbb{R}^m} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m} + \vec{u} = \vec{u}$, ($\vec{0}_{\mathbb{R}^m}$ *est un élément neutre pour l'addition*).

Proposition

Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *et* λ, μ *dans* $\mathbb{R}$,

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, (*commutativité de l'addition*).

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, (*associativité de l'addition*).

iii) $\vec{u} + \vec{0}_{\mathbb{R}^m} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m} + \vec{u} = \vec{u}$, ($\vec{0}_{\mathbb{R}^m}$ *est un élément neutre pour l'addition*).

iv) $\vec{u} + (-1)\vec{u} = (-1)\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$, (*tout élément admet un opposé pour l'addition*).

Proposition

Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans $\mathbb{R}^m$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$,

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, (*commutativité de l'addition*).

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, (*associativité de l'addition*).

iii) $\vec{u} + \vec{0}_{\mathbb{R}^m} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m} + \vec{u} = \vec{u}$, ($\vec{0}_{\mathbb{R}^m}$ *est un élément neutre pour l'addition*).

iv) $\vec{u} + (-1)\vec{u} = (-1)\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$, (*tout élément admet un opposé pour l'addition*).

v) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$, (*distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition vectorielle*).

Proposition

Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *et* λ, μ *dans* $\mathbb{R}$*,*

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, (*commutativité de l'addition*).

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, (*associativité de l'addition*).

iii) $\vec{u} + \vec{0}_{\mathbb{R}^m} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m} + \vec{u} = \vec{u}$, ($\vec{0}_{\mathbb{R}^m}$ *est un élément neutre pour l'addition*).

iv) $\vec{u} + (-1)\vec{u} = (-1)\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$, (*tout élément admet un opposé pour l'addition*).

v) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$, (*distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition vectorielle*).

vi) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$, (*distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition scalaire*).

Proposition

Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans $\mathbb{R}^m$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$,

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, (*commutativité de l'addition*).

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, (*associativité de l'addition*).

iii) $\vec{u} + \vec{0}_{\mathbb{R}^m} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m} + \vec{u} = \vec{u}$, ($\vec{0}_{\mathbb{R}^m}$ *est un élément neutre pour l'addition*).

iv) $\vec{u} + (-1)\vec{u} = (-1)\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$, (*tout élément admet un opposé pour l'addition*).

v) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$, (*distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition vectorielle*).

vi) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$, (*distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition scalaire*).

vii) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$ (*"associativité" de la multiplication externe*).

Proposition

Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *et* λ, μ *dans* $\mathbb{R}$,

i) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, (*commutativité de l'addition*).

ii) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, (*associativité de l'addition*).

iii) $\vec{u}+\vec{0}_{\mathbb{R}^m}=\vec{0}_{\mathbb{R}^m}+\vec{u}=\vec{u}$, ($\vec{0}_{\mathbb{R}^m}$ *est un élément neutre pour l'addition*).

iv) $\vec{u}+(-1)\vec{u}=(-1)\vec{u}+\vec{u}=\vec{0}_{\mathbb{R}^m}$, (*tout élément admet un opposé pour l'addition*).

v) $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$, (*distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition vectorielle*).

vi) $(\lambda+\mu)\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$, (*distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition scalaire*).

vii) $\lambda(\mu\vec{u})=(\lambda\mu)\vec{u}$ (*"associativité" de la multiplication externe*).

viii) $1\vec{u}=\vec{u}$, (1 *est un "élément neutre" pour la multiplication externe*).

Proposition

Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans $\mathbb{R}^m$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$,

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, (*commutativité de l'addition*).

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, (*associativité de l'addition*).

iii) $\vec{u} + \vec{0}_{\mathbb{R}^m} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m} + \vec{u} = \vec{u}$, ($\vec{0}_{\mathbb{R}^m}$ *est un élément neutre pour l'addition*).

iv) $\vec{u} + (-1)\vec{u} = (-1)\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$, (*tout élément admet un opposé pour l'addition*).

v) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$, (*distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition vectorielle*).

vi) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$, (*distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition scalaire*).

vii) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$ (*"associativité" de la multiplication externe*).

viii) $1\vec{u} = \vec{u}$, (1 *est un "élément neutre" pour la multiplication externe*).

Proposition

Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *et* λ, μ *dans* $\mathbb{R}$,

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, (*commutativité de l'addition*).

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, (*associativité de l'addition*).

iii) $\vec{u} + \vec{0}_{\mathbb{R}^m} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m} + \vec{u} = \vec{u}$, ($\vec{0}_{\mathbb{R}^m}$ *est un élément neutre pour l'addition*).

iv) $\vec{u} + (-1)\vec{u} = (-1)\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$, (*tout élément admet un opposé pour l'addition*).

v) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$, (*distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition vectorielle*).

vi) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$, (*distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition scalaire*).

vii) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$ (*"associativité" de la multiplication externe*).

viii) $1\vec{u} = \vec{u}$, (1 *est un "élément neutre" pour la multiplication externe*).

Remarque. Par les propriétés i) à iv) on voit que $(\mathbb{R}^m, +)$ est groupe commutatif.

Définition

Les propriétés algébriques (i), (ii),..., (viii), confèrent à $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ *ce que l'on appelle une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*. Les éléments de* $\mathbb{R}^m$ *sont appelés les vecteurs de cet espace vectoriel et les réels sont appelés les scalaires.*

Définition

Les propriétés algébriques (i), (ii),..., (viii), confèrent à $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ *ce que l'on appelle une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*. Les éléments de* $\mathbb{R}^m$ *sont appelés les vecteurs de cet espace vectoriel et les réels sont appelés les scalaires.*

On peut maintenant mener toutes sortes de calculs avec l'addition $(+)$ et la multiplication par un scalaire $(\cdot)$ en appliquant les règles usuelles. Ainsi

$$(\lambda+\mu)(\vec{u}+\vec{v}) = (\lambda+\mu)\vec{u}+(\lambda+\mu)\vec{v} = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}+\mu\vec{u}+\mu\vec{v} = \lambda(\vec{u}+\vec{v})+\mu(\vec{u}+\vec{v})$$

Attention à ne pas additionner des scalaires et des vecteurs et à ne pas multiplier deux vecteurs entre eux.

Proposition

Pour tout $\vec{u}$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *et* λ *dans* $\mathbb{R}$,

$$0\vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}, \quad et \quad \lambda\vec{0}_{\mathbb{R}^m} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}.$$

A partir des deux opérations de base appliquées un nombre fini de fois et en utilisant les propriétés *i*) à *viii*), on aboutit à la notion fondamentale.

A partir des deux opérations de base appliquées un nombre fini de fois et en utilisant les propriétés *i*) à *viii*), on aboutit à la notion fondamentale.

Définition

Soient $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ *une famille de* n *vecteurs de* $\mathbb{R}^m$ *et* $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ *une famille de* n *scalaires. Alors,*

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n,$$

s'appelle une combinaison linéaire de la famille $\{\vec{u}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ *dont les coefficients sont les* $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,n}$.

Lien avec les systèmes linéaires.

Définition

Soit $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ *une famille de n vecteurs de* $\mathbb{R}^m$. *L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de la famille est appelé* ***espace engendré*** *par cette famille*

$$vect\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\} = \{\vec{w} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n \in \mathbb{R}^m, \\ \{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}\}.$$

C'est toujours un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$. Par convention, on posera $\mathrm{vect}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$.

Remarques.

Remarques.

i) $\vec{0} = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \cdots + 0\vec{u}_n \in \text{vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

Remarques.

i) $\vec{0} = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \cdots + 0\vec{u}_n \in \text{vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

ii) Le système linéaire dont la matrice augmentée est

$$(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \ldots \ \vec{a}_n \ \vec{b})$$

est compatible si, et seulement si $b \in \text{vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

Remarques.

i) $\vec{0} = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \cdots + 0\vec{u}_n \in \text{vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

ii) Le système linéaire dont la matrice augmentée est

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ \ldots\ \ \vec{a}_n\ \vec{b})$$

est compatible si, et seulement si $b \in \text{vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

iii) $\forall j, \quad \forall \lambda, \quad \lambda \vec{u}_j \in \text{vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

Remarques.

i) $\vec{0} = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \cdots + 0\vec{u}_n \in \text{vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

ii) Le système linéaire dont la matrice augmentée est

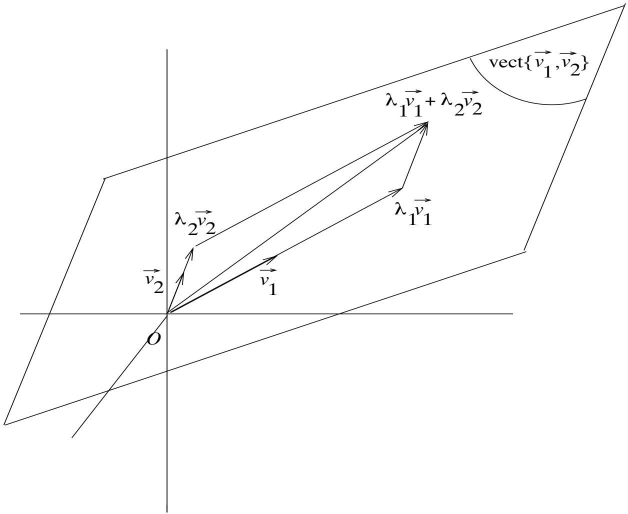
$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ \ldots\ \ \vec{a}_n\ \vec{b})$$

est compatible si, et seulement si $b \in \text{vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

iii) $\forall j, \quad \forall \lambda, \quad \lambda\vec{u}_j \in \text{vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

iv) $\text{vect}\{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$.

Interprétation géométriques.



Définition

On dit qu'une famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ *de* $\mathbb{R}^m$ *est* *génératrice* *(ou* *engendre* $\mathbb{R}^m$*) si*

$$vect\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} = \mathbb{R}^m.$$

En d'autres termes, si une famille est génératrice, alors tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Produit matrice–vecteur

Définition

Soit A une matrice $m \times n$, de colonnes $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, et soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Le produit de A par $\vec{x}$ est le <u>vecteur</u> de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$A\vec{x} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

Produit matrice–vecteur

Définition

Soit A une matrice $m \times n$, de colonnes $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, et soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Le produit de A par $\vec{x}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$A\vec{x} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

Remarques.

Produit matrice–vecteur

Définition

Soit A une matrice $m \times n$, de colonnes $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, et soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Le produit de A par $\vec{x}$ est le <u>vecteur</u> de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$A\vec{x} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \ldots \ \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

Remarques.

a) Le produit $A\vec{x}$ n'est donc que la combinaison linéaire des vecteurs-colonnes de A dont les coefficients sont les lignes de $\vec{x}$.

Produit matrice–vecteur

Définition

Soit A une matrice $m \times n$, de colonnes $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, et soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Le produit de A par $\vec{x}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$A\vec{x} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

Remarques.

a) Le produit $A\vec{x}$ n'est donc que la combinaison linéaire des vecteurs-colonnes de A dont les coefficients sont les lignes de $\vec{x}$.

b) Le produit matrice-vecteur n'est défini que si $\vec{x}$ a le même nombre de lignes que le nombre de colonnes de A.

Exemple.

Proposition

La matrice $n \times n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

est telle que $I_n\vec{x} = \vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. On l'appelle matrice identité $n \times n$.

Théorème (Linéarité)

Soient A une matrice $m \times n$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ un scalaire. On a

i) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$,

ii) $A(\lambda\vec{u}) = \lambda(A\vec{u})$.

Théorème (Linéarité)

Soient A une matrice $m \times n$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ un scalaire. On a

i) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$,

ii) $A(\lambda\vec{u}) = \lambda(A\vec{u})$.

Le signe $+$ dans le membre de gauche de i) désigne l'addition dans $\mathbb{R}^n$, alors que le signe $+$ dans le membre de droite désigne l'addition dans $\mathbb{R}^m$.

Théorème (Linéarité)

Soient A une matrice $m \times n$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ un scalaire. On a

i) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$,

ii) $A(\lambda\vec{u}) = \lambda(A\vec{u})$.

Le signe $+$ dans le membre de gauche de i) désigne l'addition dans $\mathbb{R}^n$, alors que le signe $+$ dans le membre de droite désigne l'addition dans $\mathbb{R}^m$.

Vérification.

Corollaire (Généralisation)

Soient A une matrice $m \times n$, $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, n scalaires. Alors,

$$A(\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n) = \lambda_1 A\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n A\vec{u}_n.$$

Remarques.

Corollaire (Généralisation)

Soient A une matrice $m \times n$, $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, n scalaires. Alors,

$$A(\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n) = \lambda_1 A\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n A\vec{u}_n.$$

Remarques.

a) Le produit matrice-vecteur transforme donc toute combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$ en la combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^m$ avec les même coefficients.

Corollaire (Généralisation)

Soient A une matrice $m \times n$, $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, n scalaires. Alors,

$$A(\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n) = \lambda_1 A\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n A\vec{u}_n.$$

Remarques.

a) Le produit matrice-vecteur transforme donc toute combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$ en la combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^m$ avec les même coefficients.

b) Mentionnons pour clore cette section la formule générale donnant la i-éme ligne d'un produit matrice-vecteur,

$$(A\vec{x})_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j.$$

Corollaire (Généralisation)

Soient A une matrice $m \times n$, $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, n scalaires. Alors,

$$A(\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n) = \lambda_1 A\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n A\vec{u}_n.$$

Remarques.

a) Le produit matrice-vecteur transforme donc toute combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$ en la combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^m$ avec les même coefficients.

b) Mentionnons pour clore cette section la formule générale donnant la i-éme ligne d'un produit matrice-vecteur,

$$(A\vec{x})_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j.$$

Remarquer sur cette formule concise la sommation par rapport à l'indice répété j !

Application aux systèmes linéaires

Application aux systèmes linéaires

On va interpréter les systèmes linéaires à l'aide de produits matrice-vecteur.

Application aux systèmes linéaires

On va interpréter les systèmes linéaires à l'aide de produits matrice-vecteur.

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 3, \\ & -5x_2 & +x_3 & = & 6. \end{array}\right.$$

Application aux systèmes linéaires

On va interpréter les systèmes linéaires à l'aide de produits matrice-vecteur.

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 3, \\ & -5x_2 & +x_3 & = & 6. \end{array}\right.$$

Le système est clairement équivalent à l'équation vectorielle

Application aux systèmes linéaires

On va interpréter les systèmes linéaires à l'aide de produits matrice-vecteur.

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 3, \\ & -5x_2 & +x_3 & = & 6. \end{array}\right.$$

Le système est clairement équivalent à l'équation vectorielle

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -5x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On va interpréter les systèmes linéaires à l'aide de produits matrice-vecteur.

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 3, \\ & -5x_2 & +x_3 & = & 6. \end{array} \right.$$

Le système est clairement équivalent à l'équation vectorielle

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -5x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Qui s'écrit encore :

Application aux systèmes linéaires

On va interpréter les systèmes linéaires à l'aide de produits matrice-vecteur.

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 3, \\ & -5x_2 & +x_3 & = & 6. \end{array}\right.$$

Le système est clairement équivalent à l'équation vectorielle

$$\left(\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -5x_2 + x_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 6 \end{array}\right)$$

Qui s'écrit encore :

$$x_1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right) + x_2 \left(\begin{array}{c} 2 \\ -5 \end{array}\right) + x_3 \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 6 \end{array}\right)$$

Application aux systèmes linéaires

On va interpréter les systèmes linéaires à l'aide de produits matrice-vecteur.

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 3, \\ & -5x_2 & +x_3 & = & 6. \end{array} \right.$$

Le système est clairement équivalent à l'équation vectorielle

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -5x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Qui s'écrit encore :

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Forme sous laquelle on reconnaît un produit matrice-vecteur :

Application aux systèmes linéaires

On va interpréter les systèmes linéaires à l'aide de produits matrice-vecteur.

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 3, \\ & -5x_2 & +x_3 & = & 6. \end{array}\right.$$

Le système est clairement équivalent à l'équation vectorielle

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -5x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Qui s'écrit encore :

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Forme sous laquelle on reconnaît un produit matrice-vecteur :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

on réécrit le système linéaire sous la forme concise suivante

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

Posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

on réécrit le système linéaire sous la forme concise suivante

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

Bien sûr, A est la matrice du système et $\vec{b}$ le second membre, écrit sous forme vectorielle.

Proposition

Tout système linéaire de m équations à n inconnues dont la matrice est A et le second membre $b \in \mathbb{R}^m$ s'écrit de façon équivalente

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad ou \quad x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

Proposition

Tout système linéaire de m équations à n inconnues dont la matrice est A et le second membre $b \in \mathbb{R}^m$ s'écrit de façon équivalente

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad ou \quad x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

Théorème

Soit A une matrice $m \times n$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

Proposition

Tout système linéaire de m équations à n inconnues dont la matrice est A et le second membre $b \in \mathbb{R}^m$ s'écrit de façon équivalente

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad ou \quad x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

Théorème

Soit A une matrice $m \times n$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) *Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible.*

Proposition

Tout système linéaire de m équations à n inconnues dont la matrice est A et le second membre $b \in \mathbb{R}^m$ s'écrit de façon équivalente

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad ou \quad x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

Théorème

Soit A une matrice $m \times n$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) *Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible.*

ii) *Les vecteurs-colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$*

Proposition

Tout système linéaire de m équations à n inconnues dont la matrice est A et le second membre $b \in \mathbb{R}^m$ s'écrit de façon équivalente

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \textit{ou} \quad x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

Théorème

Soit A une matrice $m \times n$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) *Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible.*

ii) *Les vecteurs-colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$*

iii) *La matrice A admet une position de pivot par ligne.*

Proposition

Tout système linéaire de m équations à n inconnues dont la matrice est A et le second membre $b \in \mathbb{R}^m$ s'écrit de façon équivalente

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad ou \quad x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

Théorème

Soit A une matrice $m \times n$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) *Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible.*

ii) *Les vecteurs-colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$*

iii) *La matrice A admet une position de pivot par ligne.*

Corollaire

Une famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^m$ est génératrice si, et seulement si la matrice $(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \ldots \ \vec{v}_n)$ admet une position de pivot par ligne.

Définition

Une famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ *de* $\mathbb{R}^m$ *est dite linéairement indépendante ou libre si toute combinaison linéaire nulle*

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}_{\mathbb{R}^m},$$

est telle que TOUS ses coefficients sont nuls :
$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$
Dans le cas contraire on dit que la famille est linéairement dépendante ou liée. Une telle combinaison linéaire s'appelle alors une relation de dépendance linéaire entre les $\vec{u}_j$*.*

Par convention, on posera que l'ensemble vide est une famille libre.

Théorème

Soit $A = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_n)$*. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

Théorème

Soit $A = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_n)$*. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

i) *La famille* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ *est libre.*

Théorème

Soit $A = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_n)$*. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

i) *La famille* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ *est libre.*

ii) *Le système homogène* $A\vec{x} = \vec{0}$ *n'admet que la solution triviale.*

Théorème

Soit $A = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_n)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) *La famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ est libre.*

ii) *Le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale.*

iii) *La matrice A admet une position de pivot par colonne.*

Théorème

Soit $A = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \ldots \ \vec{u}_n)$*. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

i) *La famille* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ *est libre.*

ii) *Le système homogène* $A\vec{x} = \vec{0}$ *n'admet que la solution triviale.*

iii) *La matrice* A *admet une position de pivot par colonne.*

Remarque. Le seul point non trivial consiste à remarquer que le système homogène admet une solution unique si, et seulement si il n'y a pas de variable libre, c'est-à-dire si, et seulement si la matrice admet une position de pivot dans chacune des ses colonnes.

Exemple.

Proposition

i) *La famille $\{\vec{v}\}$ est linéairement indépendante si $\vec{v} \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$ et linéairement dépendante si $\vec{v} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$.*

ii) *La famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est linéairement indépendante si et seulement si $\vec{v}_1$ n'est pas un multiple de $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{v}_1$.*

Proposition

i) *La famille* $\{\vec{v}\}$ *est linéairement indépendante si* $\vec{v} \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$ *et linéairement dépendante si* $\vec{v} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$.

ii) *La famille* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ *est linéairement indépendante si et seulement si* $\vec{v}_1$ *n'est pas un multiple de* $\vec{v}_2$ *et* $\vec{v}_2$ *n'est pas un multiple de* $\vec{v}_1$.

Preuve

Proposition

i) *La famille $\{\vec{v}\}$ est linéairement indépendante si $\vec{v} \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$ et linéairement dépendante si $\vec{v} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$.*

ii) *La famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est linéairement indépendante si et seulement si $\vec{v}_1$ n'est pas un multiple de $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{v}_1$.*

Preuve

Théorème

Une famille $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de $n \geq 2$ vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est linéairement dépendante si et seulement si un au moins des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

Théorème

Théorème

Soit $n > m$. Alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est automatiquement liée.

Théorème

Soit $n > m$. Alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est automatiquement liée.

Remarque. Dans ce cas, inutile donc de se lancer dans des calculs de méthode de Gauss. ATTENTION : par contre si $n < m$, on ne peut rien dire *a priori*. La famille peut être libre ou liée, seul le calcul peut le dire. La contraposée du théorème précédent est non moins importante, c'est pourquoi on l'explicite

Théorème

Soit $n > m$. Alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est automatiquement liée.

Remarque. Dans ce cas, inutile donc de se lancer dans des calculs de méthode de Gauss. ATTENTION : par contre si $n < m$, on ne peut rien dire *a priori*. La famille peut être libre ou liée, seul le calcul peut le dire. La contraposée du théorème précédent est non moins importante, c'est pourquoi on l'explicite

Théorème

Théorème

Soit $n > m$. Alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est automatiquement liée.

Remarque. Dans ce cas, inutile donc de se lancer dans des calculs de méthode de Gauss. ATTENTION : par contre si $n < m$, on ne peut rien dire *a priori*. La famille peut être libre ou liée, seul le calcul peut le dire. La contraposée du théorème précédent est non moins importante, c'est pourquoi on l'explicite

Théorème

Toute famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ a au plus m éléments.

Théorème

Soit $n > m$. Alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est automatiquement liée.

Remarque. Dans ce cas, inutile donc de se lancer dans des calculs de méthode de Gauss. ATTENTION : par contre si $n < m$, on ne peut rien dire *a priori*. La famille peut être libre ou liée, seul le calcul peut le dire. La contraposée du théorème précédent est non moins importante, c'est pourquoi on l'explicite

Théorème

Toute famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ a au plus m éléments.

Proposition

Théorème

Soit $n > m$. Alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est automatiquement liée.

Remarque. Dans ce cas, inutile donc de se lancer dans des calculs de méthode de Gauss. ATTENTION : par contre si $n < m$, on ne peut rien dire *a priori*. La famille peut être libre ou liée, seul le calcul peut le dire. La contraposée du théorème précédent est non moins importante, c'est pourquoi on l'explicite

Théorème

Toute famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ a au plus m éléments.

Proposition

Si une famille contient le vecteur nul, alors elle est liée. Si elle contient deux vecteurs égaux, alors elle est liée.

Définition

Une base de $\mathbb{R}^m$ est une famille à la fois **libre et génératrice**.

Exemple.

Théorème

i) *Toute base de $\mathbb{R}^m$ admet exactement m éléments.*
ii) *Toute famille libre de m éléments est une base de $\mathbb{R}^m$.*
iii) *Toute famille génératrice de m éléments est une base de $\mathbb{R}^m$.*

Preuve.

Le nombre d''éléments d'une base ne dépend pas du choix de la base. Il s'agit d'une quantité caractéristique de l'espace tout entier.

Le nombre d''éléments d'une base ne dépend pas du choix de la base. Il s'agit d'une quantité caractéristique de l'espace tout entier.

Définition

La dimension de $\mathbb{R}^m$ est le nombre d'éléments de toute base de $\mathbb{R}^m$,

$$\dim \mathbb{R}^m = m.$$

Le nombre d''éléments d'une base ne dépend pas du choix de la base. Il s'agit d'une quantité caractéristique de l'espace tout entier.

Définition

La dimension de $\mathbb{R}^m$ est le nombre d'éléments de toute base de $\mathbb{R}^m$,

$$\dim \mathbb{R}^m = m.$$

Exemple.

Remarques. Cette notion algébrique de dimension coïncide avec la notion géométrique de dimension pour $m = 1, 2$ et 3. En effet, $\mathbb{R}$ est représentée géométriquement par la droite, $\mathbb{R}^2$ par le plan et $\mathbb{R}^3$ par l'espace qui est tridimensionnel. La géométrie élémentaire s'arrête là, mais pas l'algèbre linéaire. On considère sans difficulté des espaces de dimension 5, 10 ou 100, etc.

Théorème

Soit $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *une base de* $\mathbb{R}^m$. *Pour tout* $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, *il existe un unique m–uplet de scalaires* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ *tel que*

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Définition

Le m–uplet $(\vec{x})_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ *s'appelle les* ***composantes*** *de* $\vec{x}$ *dans la base* $\mathcal{B}$. *On les range naturellement en colonne et l'on note*

$$(\vec{x})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *une base de* $\mathbb{R}^m$*. Pour tout* $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$*, il existe un unique m–uplet de scalaires* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ *tel que*

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Définition

Le m–uplet $(\vec{x})_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ *s'appelle les* ***composantes*** *de* $\vec{x}$ *dans la base* $\mathcal{B}$*. On les range naturellement en colonne et l'on note*

$$(\vec{x})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Remarques. Attention : en général $(\vec{x})_{\mathcal{B}} \neq \vec{x}$, sauf si $\mathcal{B}$ est la base canonique. Les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ nous donnent une nouvelle représentation du vecteur $\vec{x}$.

Théorème

Les composantes dans la base $\mathcal{B}$ ont des propriétés de linéarité

$$(\vec{x}+\vec{y})_{\mathcal{B}} = (\vec{x})_{\mathcal{B}} + (\vec{y})_{\mathcal{B}}, \qquad (\lambda\vec{x})_{\mathcal{B}} = \lambda(\vec{x})_{\mathcal{B}}$$

Remarques. Comment calcule-t-on les composantes d'un vecteur $\vec{x}$ dans une base $\mathcal{B}$? C'est simple ! On commence par écrire la définition

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{v}_m = \vec{x},$$

puis on reconnaît au premier membre un produit matrice-vecteur

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\vec{x})_{\mathcal{B}} = \vec{x}$$

où $\mathcal{P}_{\mathcal{B}} = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \ldots \ \vec{v}_m)$ s'appelle la matrice de passage. Pour calculer $(\vec{x})_{\mathcal{B}}$, il suffit de résoudre ce système linéaire $m \times m$ dont le second membre est $\vec{x}$.

Chapitre 3 : Sous–espaces vectoriels de $\mathbb{R}^m$

Définition

Soit F un sous–ensemble de $\mathbb{R}^m$. On dit que F est un **sous–espace vectoriel (s.e.v.)** *de $\mathbb{R}^m$ si et seulement si*

i) $0_{\mathbb{R}^m} \in F$.

ii) *pour tous u et v dans F, $u + v \in F$, (F est stable par addition).*

iii) *pour tout u dans F et tout λ dans $\mathbb{R}$, $\lambda u \in F$, (F est stable pour la multiplication par un scalaire).*

Remarques.

1) Un s.e.v. n'est jamais vide puisqu'il contient toujours au moins le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^m}$.
2) L'addition et la multiplication par un scalaire définissent donc des opérations sur tout s.e.v. F. De plus, si $u \in F$, alors $-u = (-1)u \in F$ par *iii*).
3) Un s.e.v. F muni des deux opérations satisfait donc les huit propriétés algébriques. C'est donc également un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

1) Un s.e.v. n'est jamais vide puisqu'il contient toujours au moins le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^m}$.
2) L'addition et la multiplication par un scalaire définissent donc des opérations sur tout s.e.v. F. De plus, si $u \in F$, alors $-u = (-1)u \in F$ par *iii*).
3) Un s.e.v. F muni des deux opérations satisfait donc les huit propriétés algébriques. C'est donc également un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemples.

1) Pour tout m, $\{0\}$ et $\mathbb{R}^m$ sont des sev de $\mathbb{R}^m$.
2) L'ensemble

$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^2;\ x_2 = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix};\ x_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

Proposition

Soit $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *une famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^m$*. Alors,* $F = vect\{v_1, \cdots, v_n\}$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^m$*.*

Proposition

Soit $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *une famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^m$. *Alors,*
$F = vect\{v_1, \cdots, v_n\}$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^m$.

Proposition

Soit $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *une famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^m$*. Alors,* $F = vect\{v_1, \cdots, v_n\}$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^m$*.*

Proposition

Soient F_1 *et* F_2 *deux s.e.v de* $\mathbb{R}^m$*. Alors,* $F_1 \cap F_2$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^m$*.*

Proposition

Soit $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *une famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^m$*. Alors,* $F = vect\{v_1, \cdots, v_n\}$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^m$*.*

Proposition

Soient F_1 *et* F_2 *deux s.e.v de* $\mathbb{R}^m$*. Alors,* $F_1 \cap F_2$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^m$*.*

Remarque. En général, $F_1 \cup F_2$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$. L'opération ensembliste qui remplace la réunion pour les s.e.v est un peu plus sophistiquée !

Définition

Soit $F_1, \ldots, F_k$ *une famille de s.e.v. de* $\mathbb{R}^m$*. L'ensemble*

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^m ;\ \exists x_i \in F_i, i = 1, \ldots, k, \textit{tels que}\ \ x = x_1 + \cdots + x_k \right\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^m$ *qui peuvent s'écrire comme une somme de* k *vecteurs, chacun d'entre eux appartenant à un* F_i*, est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^m$ *appelé somme des* $(F_i)_{i=1,\ldots,k}$ *et noté*

$$F = F_1 + \cdots + F_k = \sum_{i=1}^{i=k} F_i.$$

Définition

Soit $F_1, \dots, F_k$ une famille de s.e.v. de $\mathbb{R}^m$. L'ensemble

$$F = \Big\{ x \in \mathbb{R}^m;\ \exists x_i \in F_i, i = 1, \dots, k, \textit{tels que}\ \ x = x_1 + \cdots + x_k \Big\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^m$ qui peuvent s'écrire comme une somme de k vecteurs, chacun d'entre eux appartenant à un F_i, est un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ appelé somme des $(F_i)_{i=1,\dots,k}$ et noté

$$F = F_1 + \cdots + F_k = \sum_{i=1}^{i=k} F_i.$$

Remarque. On peut montrer que $\sum_{i=1}^{i=k} F_i$ est le plus petit s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ qui contient $\cup_{i=1}^{i=k} F_i$.

Définition

Soit $F = \sum_{i=1}^{i=k} F_i$*. Si pour tout* x *dans* F *la décomposition en somme d'éléments de* F_i *est unique, alors on dit que la* somme directe *et l'on note dans ce cas*

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k.$$

Définition

Soit $F = \sum_{i=1}^{i=k} F_i$. Si pour tout x dans F la décomposition en somme d'éléments de F_i est unique, alors on dit que la somme directe *et l'on note dans ce cas*

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k.$$

Proposition

L'espace $F = \sum_{i=1}^{i=k} F_i$ est une somme directe si, et seulement si on a l'équivalence

$$x_i \in F_i,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 0 \Longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, k,\ x_i = 0.$$

Deux sev en somme directe

Proposition

Soient F_1 et F_2 deux sev de $\mathbb{R}^m$. On a $F = F_1 \oplus F_2$ si, et seulement si $F = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Proposition

Soient F_1 et F_2 deux sev de $\mathbb{R}^m$. On a $F = F_1 \oplus F_2$ si, et seulement si $F = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Remarque. Attention, cette proposition est fausse à partir de trois sev. On peut avoir $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{0\}$ sans que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ ne soit directe.

Deux sev en somme directe

Proposition

Soient F_1 et F_2 deux sev de $\mathbb{R}^m$. On a $F = F_1 \oplus F_2$ si, et seulement si $F = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Remarque. Attention, cette proposition est fausse à partir de trois sev. On peut avoir $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{0\}$ sans que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ ne soit directe.

Définition

Si $F = F_1 \oplus F_2$, on dit que F_1 et F_2 sont des sev supplémentaires.

Bases, composantes, dimensions

La notion de base s'étend aux sev de $\mathbb{R}^m$.

La notion de base s'étend aux sev de $\mathbb{R}^m$.

Définition

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$. Une famille de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de F est une **base** *de F si elle est à la fois libre et génératrice de F, c'est-à-dire que $F = vect\{v_1, \ldots, v_k\}$.*

La notion de base s'étend aux sev de $\mathbb{R}^m$.

Définition

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$. Une famille de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de F est une **base** *de F si elle est à la fois libre et génératrice de F, c'est-à-dire que $F = vect\{v_1, \ldots, v_k\}$.*

Théorème (de la base extraite)

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ engendré par une famille finie de vecteurs $\mathcal{V}$. Alors il existe un sous–ensemble de $\mathcal{V}$ qui est une base de F.

La notion de base s'étend aux sev de $\mathbb{R}^m$.

Définition

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$. Une famille de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de F est une **base** *de F si elle est à la fois libre et génératrice de F, c'est-à-dire que $F = vect\{v_1, \ldots, v_k\}$.*

Théorème (de la base extraite)

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ engendré par une famille finie de vecteurs $\mathcal{V}$. Alors il existe un sous–ensemble de $\mathcal{V}$ qui est une base de F.

Preuve.

Théorème (de la base incomplète)

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{V}$ une famille libre de vecteurs de F. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de F qui contient $\mathcal{V}$.

Théorème (de la base incomplète)

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{V}$ une famille libre de vecteurs de F. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de F qui contient $\mathcal{V}$.

Preuve. Posons $\mathcal{V} = \{u_1, \cdots, u_k\}$, $k \leq m$.

i) Si $\mathcal{V}$ est une famille génératrice de F alors $\mathcal{V}$ est la base cherchée.

ii) Sinon, on ajoute à cette famille un vecteur v qui n'est pas combinaison linéaire des u_i.

iii) On réitère jusqu'à obtenir une base de F.

Théorème (de la base incomplète)

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{V}$ une famille libre de vecteurs de F. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de F qui contient $\mathcal{V}$.

Preuve. Posons $\mathcal{V} = \{u_1, \cdots, u_k\}$, $k \leq m$.

i) Si $\mathcal{V}$ est une famille génératrice de F alors $\mathcal{V}$ est la base cherchée.

ii) Sinon, on ajoute à cette famille un vecteur v qui n'est pas combinaison linéaire des u_i.

iii) On réitère jusqu'à obtenir une base de F.

Corollaire

Tout s.e.v admet une base.

Preuve. $\emptyset$ est une famille libre de F, donc par le théorème de la base incomplète il existe une base de F.

Théorème (et définition)

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ une base de F. Pour tout $x \in F$, il existe un unique k–uplet de scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ tel que

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k.$$

Le k–uplet $(x)_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ s'appelle les **composantes** *de x dans $\mathcal{B}$, notées*

$$(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$

De plus, on a les propriétés de linéarité, pour tous x, y dans F et tout λ dans $\mathbb{R}$,

$$(x + y)_{\mathcal{B}} = (x)_{\mathcal{B}} + (y)_{\mathcal{B}}, \quad (\lambda x)_{\mathcal{B}} = \lambda (x)_{\mathcal{B}}.$$

Remarque. Le théorème précédent permet de ramener l'étude d'un sev de $\mathbb{R}^m$ à celle de l'espace $\mathbb{R}^k$ pour $k \leq m$. Il n'y a plus aucune raison de confondre $x \in \mathbb{R}^m$ et $(x)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^k$ puisque ces deux vecteurs n'habitent pas dans le même espace !

Remarque. Le théorème précédent permet de ramener l'étude d'un sev de $\mathbb{R}^m$ à celle de l'espace $\mathbb{R}^k$ pour $k \leq m$. Il n'y a plus aucune raison de confondre $x \in \mathbb{R}^m$ et $(x)_\mathcal{B} \in \mathbb{R}^k$ puisque ces deux vecteurs n'habitent pas dans le même espace !

Corollaire

Soit F un sev de $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{B}$ une base de F de cardinal k. Alors on a

i) $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_l x_l)_\mathcal{B} = \lambda_1 (x_1)_\mathcal{B} + \cdots + \lambda_l (x_l)_\mathcal{B}$

ii) *Une famille $\{x_1, \ldots, x_l\}$ de F est libre si, et seulement si la famille $\{(x_1)_\mathcal{B}, \ldots, (x_l)_\mathcal{B}\}$ est libre dans $\mathbb{R}^k$.*

iii) *Les familles $\{x_1, \ldots, x_l\}$ de F et $\{(x_1)_\mathcal{B}, \ldots, (x_l)_\mathcal{B}\}$ de $\mathbb{R}^k$ ont exactement les mêmes relations de dépendance linéaire.*

Théorème

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et soit $\mathcal{B}$ une base de F de cardinal k. Toute famille de n vecteurs avec $n > k$ est liée.

Théorème

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et soit $\mathcal{B}$ une base de F de cardinal k. Toute famille de n vecteurs avec $n > k$ est liée.

Théorème (de la dimension)

Toutes les bases d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ ont le même nombre d'éléments.

Théorème

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et soit $\mathcal{B}$ une base de F de cardinal k. Toute famille de n vecteurs avec $n > k$ est liée.

Théorème (de la dimension)

Toutes les bases d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ ont le même nombre d'éléments.

Ce qui conduit à la définition suivante.

Définition

La **dimension** *d'un s.e.v. F de $\mathbb{R}^m$ est le nombre d'éléments de chacune de ses bases.*

$$\dim F = \mathrm{card}\mathcal{B}, \text{ pour toute base } \mathcal{B} \text{ de } F.$$

Théorème

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et soit $\mathcal{B}$ une base de F de cardinal k. Toute famille de n vecteurs avec $n > k$ est liée.

Théorème (de la dimension)

Toutes les bases d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ ont le même nombre d'éléments.

Ce qui conduit à la définition suivante.

Définition

*La **dimension** d'un s.e.v. F de $\mathbb{R}^m$ est le nombre d'éléments de chacune de ses bases.*

$$\mathrm{dim} F = \mathrm{card}\mathcal{B}, \text{ pour toute base } \mathcal{B} \text{ de } F.$$

Théorème

Soit F un s.e.v de **dimension** *k alors*

- *toute famille libre de F a* **au plus** *k éléments,*
- *une famille libre de F de k éléments est une base de F,*
- *toute famille génératrice de F a* **au moins** *k éléments,*
- *une famille génératrice de F de k éléments est une base de F.*

Théorème

Soit F un s.e.v de **dimension** *k alors*

- *toute famille libre de F a* **au plus** *k éléments,*
- *une famille libre de F de k éléments est une base de F,*
- *toute famille génératrice de F a* **au moins** *k éléments,*
- *une famille génératrice de F de k éléments est une base de F.*

Remarque. Ainsi, quand on connaît la dimension d'un s.e.v. et *seulement dans ce cas*, pour montrer qu'une famille donnée est une base, il suffit de s'assurer que son nombre d'éléments est égal à la dimension, puis vérifier soit que la famille est libre, soit qu'elle est génératrice.

Théorème

Soient F_1 *et* F_2 *deux s.e.v. de* $\mathbb{R}^m$ *tels que* $F_1 \subset F_2$*. Alors*

$$\dim F_1 \leq \dim F_2 \leq m.$$

De plus, $\dim F_1 = \dim F_2$ *si et seulement si* $F_1 = F_2$*.*

Théorème

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ tels que $F_1 \subset F_2$. Alors

$$\dim F_1 \leq \dim F_2 \leq m.$$

De plus, $\dim F_1 = \dim F_2$ *si et seulement si* $F_1 = F_2$.

Preuve.

Théorème

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^m$ et soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des parties de $\mathbb{R}^m$ telles que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$. Alors,

$$\mathbb{R}^m = vect\mathcal{B}_1 \oplus vect\mathcal{B}_2.$$

Réciproquement, si $\mathbb{R}^m = F_1 \oplus F_2$ et $\mathcal{B}_i$ une base de $F_i, i = 1, 2$ alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^m$.

Théorème

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^m$ et soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des parties de $\mathbb{R}^m$ telles que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$. Alors,

$$\mathbb{R}^m = vect\mathcal{B}_1 \oplus vect\mathcal{B}_2.$$

Réciproquement, si $\mathbb{R}^m = F_1 \oplus F_2$ et $\mathcal{B}_i$ une base de $F_i, i = 1, 2$ alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^m$.

Définition

Si $\mathbb{R}^m = F_1 \oplus F_2$ *alors*

$$m = \dim F_1 + \dim F_2.$$

De façon plus générale on a

Définition

Si $\mathbb{R}^m = F_1 \oplus F_2$ *alors*

$$m = \dim F_1 + \dim F_2.$$

De façon plus générale on a

Proposition

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2).$$

Remarque. Tout ce que l'on a raconté dans ces deux derniers chapitres reste vrai si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. On a alors affaire à des espaces vectoriels complexes, des sev de $\mathbb{C}^m$, etc.

En général un s.e.v. admet une infinité de bases. Comment sont reliées les composantes d'un vecteur dans une base aux composantes de ce même vecteur dans une autre base ?
Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ de dimension k et soient $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ et $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ deux bases de F.

En général un s.e.v. admet une infinité de bases. Comment sont reliées les composantes d'un vecteur dans une base aux composantes de ce même vecteur dans une autre base ?
Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ de dimension k et soient $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ et $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ deux bases de F.

Définition

On appelle **matrice de passage** *de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = ((v_1)_{\mathcal{B}}(v_2)_{\mathcal{B}} \cdots (v_k)_{\mathcal{B}}).$$

C'est une matrice $k \times k$.

En général un s.e.v. admet une infinité de bases. Comment sont reliées les composantes d'un vecteur dans une base aux composantes de ce même vecteur dans une autre base ?
Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ de dimension k et soient $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ et $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ deux bases de F.

Définition

On appelle **matrice de passage** *de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = ((v_1)_{\mathcal{B}}(v_2)_{\mathcal{B}} \cdots (v_k)_{\mathcal{B}}).$$

C'est une matrice $k \times k$.

Théorème

Pour tout $x \in F$, on a

$$(x)_{\mathcal{B}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(x)_{\mathcal{B}}.$$

Dans tout ce qui suit E_i désigne un sev de $\mathbb{R}^{m_i}$ de dimension n_i.

Dans tout ce qui suit E_i désigne un sev de $\mathbb{R}^{m_i}$ de dimension n_i.

Définition

On dit qu'une application $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est une application linéaire si et seulement si

i) *Pour tous x, y dans E_1, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.*

ii) *Pour tout x dans E_1 et tout λ dans $\mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.*

Dans tout ce qui suit E_i désigne un sev de $\mathbb{R}^{m_i}$ de dimension n_i.

Définition

On dit qu'une application $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est une application linéaire si et seulement si

i) *Pour tous x, y dans E_1, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.*
ii) *Pour tout x dans E_1 et tout λ dans $\mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.*

Définition

L'ensemble de toutes les applications linéaires de E_1 dans E_2 est noté $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Si $E_1 = E_2 = E$, on le note plus simplement $\mathcal{L}(E)$.

Chapitre 4 : Applications linéaires

Dans tout ce qui suit E_i désigne un sev de $\mathbb{R}^{m_i}$ de dimension n_i.

Définition

On dit qu'une application $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est une application linéaire si et seulement si

i) *Pour tous x, y dans E_1, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.*

ii) *Pour tout x dans E_1 et tout λ dans $\mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.*

Définition

L'ensemble de toutes les applications linéaires de E_1 dans E_2 est noté $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Si $E_1 = E_2 = E$, on le note plus simplement $\mathcal{L}(E)$.

Remarque. Toute application linéaire satisfait $f(0) = 0$.

Exemples.

- L'application nulle $E_1 \longrightarrow E_2$, $x \longrightarrow 0$.

Exemples.

- L'application nulle $E_1 \to E_2$, $x \to 0$.
- Si $\dim E_1 = k$ et $\mathcal{B}$ est une base de E_1, alors l'application $E \to \mathbb{R}^k$, $x \to (x)_{\mathcal{B}}$ est linéaire.

Exemples.

- L'application nulle $E_1 \to E_2$, $x \to 0$.
- Si $\dim E_1 = k$ et $\mathcal{B}$ est une base de E_1, alors l'application $E \to \mathbb{R}^k$, $x \to (x)_{\mathcal{B}}$ est linéaire.
- Si A est une matrice $m \times n$, alors l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \to Ax$ est linéaire.

Exemples.

- L'application nulle $E_1 \longrightarrow E_2$, $x \longrightarrow 0$.
- Si $\dim E_1 = k$ et $\mathcal{B}$ est une base de E_1, alors l'application $E \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $x \longrightarrow (x)_{\mathcal{B}}$ est linéaire.
- Si A est une matrice $m \times n$, alors l'application $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \longrightarrow Ax$ est linéaire.

Définition

Si f est une application linéaire bijective de E_1 dans E_2, on dit que c'est un isomorphisme entre E_1 et E_2.

Exemples.

- L'application nulle $E_1 \to E_2$, $x \to 0$.
- Si $\dim E_1 = k$ et $\mathcal{B}$ est une base de E_1, alors l'application $E \to \mathbb{R}^k$, $x \to (x)_{\mathcal{B}}$ est linéaire.
- Si A est une matrice $m \times n$, alors l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \to Ax$ est linéaire.

Définition

Si f est une application linéaire bijective de E_1 dans E_2, on dit que c'est un isomorphisme entre E_1 et E_2.

Proposition

Si f est un isomorphisme entre E_1 et E_2, alors l'application réciproque f^{-1} est également linéaire de E_2 dans E_1, et c'est donc aussi un isomorphisme.

Soit f une application linéaire de E_1 dans E_2.

Soit f une application linéaire de E_1 dans E_2.

Définition

On appelle noyau *de f l'ensemble*

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E_1; f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

Soit f une application linéaire de E_1 dans E_2.

Définition

On appelle noyau de f l'ensemble

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E_1 ; f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

On appelle image de f l'ensemble

$$\mathrm{Im}\, f = \{y \in E_2 ; \exists x \in E_1, y = f(x)\} = f(E_1).$$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$*. On a*

- *Le noyau de* f *est un sev de* E_1.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. *On a*

- *Le noyau de* f *est un sev de* E_1.
- *L'image de* f *est un sev de* E_2.

Démonstration.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

- *L'application* f *est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

- *L'application* f *est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.
- *L'application* f *est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}\, f = E_2$.

Démonstration.

Exemples.

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. *On définit son* *rang* *par*

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

Proposition

Si $(v_1, v_2 \dots, v_{m_1})$ *est une base de* E_1, *alors*

$$\operatorname{Im} f = Vect\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_{m_1})\} \quad et \quad \operatorname{rg} f \leq \dim E_1 = m_1.$$

Proposition

- $\operatorname{rg} f \leq \min(\dim E_1, \dim E_2)$.
- *L'application* f *est surjective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = \dim E_2$.
- *L'application* f *est injective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = \dim E_1$.

Corollaire

Deux sev E_1 et E_2 sont isomorphes si, et seulement si $\dim E_1 = \dim E_2$.

Corollaire

Deux sev E_1 et E_2 sont isomorphes si, et seulement si $\dim E_1 = \dim E_2$.

Remarque. Il s'agit d'une nouvelle méthode pour calculer la dimension d'un sev : il suffit de montrer qu'il est isomorphe à autre sev de dimension déjà connue.

Corollaire

Si f est isomorphisme de E_1 dans E_2 alors l'image de toute base (resp. famille libre, famille génératrice) de E_1 est une base (resp. famille libre, famille génératrice) de E_2.

Corollaire

Deux sev E_1 et E_2 sont isomorphes si, et seulement si $\dim E_1 = \dim E_2$.

Remarque. Il s'agit d'une nouvelle méthode pour calculer la dimension d'un sev : il suffit de montrer qu'il est isomorphe à autre sev de dimension déjà connue.

Corollaire

Si f est isomorphisme de E_1 dans E_2 alors l'image de toute base (resp. famille libre, famille génératrice) de E_1 est une base (resp. famille libre, famille génératrice) de E_2.

Remarque. Il s'agit d'une nouvelle méthode pour construire une base d'un sev : il suffit de prendre l'image directe ou réciproque par un isomorphisme d'une base déjà connue d'un autre sev.

Matrice d'une application linéaire dans des bases

Soient deux sev E_1 et E_2 avec $\dim E_1 = n$ et $\dim E_2 = m$. Le théorème suivant relie les notions de matrice et d'application linéaire.

Théorème

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de E_2. Pour toute application linéaire de E_1 dans E_2, il existe une unique matrice A de taille $m \times n$ telle que

$$(f(x))_{\mathcal{B}_2} = A(x)_{\mathcal{B}_1}.$$

La matrice A est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Démonstrations.
Exemples.

Proposition

Soient E_1 et E_2 deux sev, $\mathcal{B}_1$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de E_2, $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et A sa matrice dans ces bases. Alors

- *L'application f est injective si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendants si, et seulement si A a une position de pivot par colonne.*
- *L'application f est surjective si et seulement si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ si, et seulement si A a une position de pivot par ligne.*

Soient E_1 et E_2 deux sev, $\mathcal{B}_1$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de E_2, $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et A sa matrice dans ces bases.

Proposition

Soit k est le nombre de variables libres associées à la matrice A. On a

$$\dim \operatorname{Ker} f = k.$$

Proposition

- *Les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}_1$ correspondants aux colonnes de pivots de A forment une base de $\operatorname{Im} f$.*
- *Soit l le nombre de variables liées (essentielles) associées à la matrice A. On a*

$$\operatorname{rg} f = l.$$

Exemples.

Théorème

Si $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, *alors*

$$\dim \ker f + \operatorname{rg} f = \dim E_1.$$

Démonstration. Compter les variables libres et essentielles !

Remarque. Dans le théorème du rang, il faut bien se rappeler que c'est la dimension de l'espace de départ qui compte. Celle de l'espace d'arrivée E_2 n'a aucune importance.

Chapitre 5 : Algèbre matricielle

Notations. On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Lorsque $m = n$, on parle de **matrices carrées** et note simplement $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

Notations. On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Lorsque $m = n$, on parle de **matrices carrées** et note simplement $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

- Dans une matrice carrée $A = (a_{ij})$ de taille $m \times m$ les coefficients a_{ii} pour $i = 1, \ldots, m$ forment ce que l'on appelle la **diagonale** de la matrice.

Notations. On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Lorsque $m = n$, on parle de **matrices carrées** et note simplement $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

- Dans une matrice carrée $A = (a_{ij})$ de taille $m \times m$ les coefficients a_{ii} pour $i = 1, \dots, m$ forment ce que l'on appelle la **diagonale** de la matrice.
- Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ c'est–à–dire hors de la diagonale, est appelée **matrice diagonale**.

Notations. On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Lorsque $m = n$, on parle de **matrices carrées** et note simplement $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

- Dans une matrice carrée $A = (a_{ij})$ de taille $m \times m$ les coefficients a_{ii} pour $i = 1, \ldots, m$ forment ce que l'on appelle la **diagonale** de la matrice.
- Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ c'est–à–dire hors de la diagonale, est appelée **matrice diagonale**.
- Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$, c'est–à–dire en–dessous de la diagonale, est appelée **matrice triangulaire supérieure**.
  Les matrices échelonnées sont triangulaires supérieures.

Notations. On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Lorsque $m = n$, on parle de **matrices carrées** et note simplement $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

- Dans une matrice carrée $A = (a_{ij})$ de taille $m \times m$ les coefficients a_{ii} pour $i = 1, \dots, m$ forment ce que l'on appelle la **diagonale** de la matrice.
- Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ c'est–à–dire hors de la diagonale, est appelée **matrice diagonale**.
- Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$, c'est–à–dire en–dessous de la diagonale, est appelée **matrice triangulaire supérieure**.
  Les matrices échelonnées sont triangulaires supérieures.
- Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$, c'est–à–dire au–dessus de la diagonale, est appelée **matrice triangulaire inférieure**.

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\
a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\
a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \cdots & a_{3m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \boxed{a_{mm}}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\
a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \boxed{a_{mm}}
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm}
\end{pmatrix}
$$

Diagonale

matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \boxed{a_{mm}} \end{pmatrix}$$

Diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \boxed{a_{mm}} \end{pmatrix}$$

Diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \boxed{a_{mm}} \end{pmatrix}$$

Diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

matrice triangulaire inférieure

Opérations linéaires sur les matrices

Définition

On définit sur $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$

Définition

On définit sur $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$

- *une loi de composition interne appelée* **addition** *:*
  Pour tous $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, la matrice $A + B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, m, \quad \textit{et} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Opérations linéaires sur les matrices

Définition

On définit sur $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$

- *une loi de composition interne appelée* **addition** *:*
  Pour tous $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, la matrice $A + B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad pour \quad i = 1, \ldots, m, \quad et \quad j = 1, \ldots, n.$$

- *une loi de composition externe appelée* **multiplication par un scalaire** *:*
  Pour tout $A = (a_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, et λ dans $\mathbb{R}$ la matrice λA est la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad pour \quad i = 1, \ldots, m, \quad et \quad j = 1, \ldots, n.$$

Exemples.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

- L'élément neutre pour l'addition est la matrice $m \times n$ nulle, notée 0, dont tous les coefficients sont nuls.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

- L'élément neutre pour l'addition est la matrice $m \times n$ nulle, notée 0, dont tous les coefficients sont nuls.
- La dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est égale à mn. En effet, la famille à mn matrices (vecteurs) particulières

$$\left\{E_{kl} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}), k = 1, \dots, m; l = 1, \dots, n\right\}$$

où les matrices E_{kl} sont définies par

$$(E_{kl})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k \quad \text{et} \quad j = l, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

forme une base de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

- L'élément neutre pour l'addition est la matrice $m \times n$ nulle, notée 0, dont tous les coefficients sont nuls.
- La dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est égale à mn. En effet, la famille à mn matrices (vecteurs) particulières

$$\left\{E_{kl} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}), k = 1, \ldots, m; l = 1, \ldots, n\right\}$$

où les matrices E_{kl} sont définies par

$$(E_{kl})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k \quad \text{et} \quad j = l, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

forme une base de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.
En particulier,

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2.$$

Définition

Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, on définit sa matrice transposée $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ par $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$.

Définition

Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, on définit sa matrice transposée $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ par $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$.

Exemple. La transposition opère une symétrie par rapport à la diagonale. Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Elle échange le rôle des lignes et des colonnes.

Définition

Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, on définit sa matrice transposée $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ par $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$.

Exemple. La transposition opère une symétrie par rapport à la diagonale. Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Elle échange le rôle des lignes et des colonnes.

Proposition

L'application de transposition $A \mapsto A^T$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$, et l'on a $(A^T)^T = A$ pour tout A.

On peut multiplier certaines matrices entre elles !

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Notons $b_1, b_2, \ldots, b_p \in \mathbb{R}^n$ les p colonnes de B. On définit le produit AB comme étant la matrice $m \times p$ dont les colonnes sont données par

$$AB = (Ab_1 \ Ab_2 \ \ldots \ Ab_p).$$

Remarques et Exemples.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a

$$(AB)x = A(Bx).$$

Démonstration.

Le produit matriciel possède les propriétés algébriques suivantes.

Le produit matriciel possède les propriétés algébriques suivantes.

Théorème

On a (en supposant les produits matriciels définis)

Le produit matriciel possède les propriétés algébriques suivantes.

Théorème

On a (en supposant les produits matriciels définis)

i) $(A + A')B = AB + A'B$ *et* $A(B + B') = AB + AB'$.

Le produit matriciel possède les propriétés algébriques suivantes.

Théorème

On a (en supposant les produits matriciels définis)

i) $(A + A')B = AB + A'B$ *et* $A(B + B') = AB + AB'$.

ii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Le produit matriciel possède les propriétés algébriques suivantes.

Théorème

On a (en supposant les produits matriciels définis)

i) $(A + A')B = AB + A'B$ *et* $A(B + B') = AB + AB'$.

ii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

iii) $(AB)C = A(BC)$ *(associativité).*

Le produit matriciel possède les propriétés algébriques suivantes.

Théorème

On a (en supposant les produits matriciels définis)

i) $(A + A')B = AB + A'B$ *et* $A(B + B') = AB + AB'$.

ii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

iii) $(AB)C = A(BC)$ *(associativité).*

Les matrices identités sont des éléments neutres à gauche et à droite pour le produit matriciel.

Le produit matriciel possède les propriétés algébriques suivantes.

Théorème

On a (en supposant les produits matriciels définis)

i) $(A + A')B = AB + A'B$ *et* $A(B + B') = AB + AB'$.

ii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

iii) $(AB)C = A(BC)$ *(associativité).*

Les matrices identités sont des éléments neutres à gauche et à droite pour le produit matriciel.

Proposition

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, *on a* $I_m A = A I_n = A$.

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *et* $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$*. Alors on a*

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

pour $i = 1, \ldots, m$ *et* $k = 1, \ldots, p$*.*

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *et* $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$*. Alors on a*

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

pour $i = 1, \ldots, m$ *et* $k = 1, \ldots, p$*.*

Remarques.

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *et* $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$*. Alors on a*

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

pour $i = 1, \ldots, m$ *et* $k = 1, \ldots, p$*.*

Remarques.

1. Le produit matriciel **N'EST PAS** commutatif :

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *et* $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. *Alors on a*

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

pour $i = 1, \ldots, m$ *et* $k = 1, \ldots, p$.

Remarques.

1. Le produit matriciel **N'EST PAS** commutatif :
   - le produit AB peut être défini mais pas le produit BA,

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *et* $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$*. Alors on a*

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

pour $i = 1, \ldots, m$ *et* $k = 1, \ldots, p$*.*

Remarques.

1. Le produit matriciel **N'EST PAS** commutatif :
   - le produit AB peut être défini mais pas le produit BA,
   - les produits AB et BA peuvent être définis mais de tailles différentes.

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *et* $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. *Alors on a*

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

pour $i = 1, \ldots, m$ *et* $k = 1, \ldots, p$.

Remarques.

1. Le produit matriciel **N'EST PAS** commutatif :
   - le produit AB peut être défini mais pas le produit BA,
   - les produits AB et BA peuvent être définis mais de tailles différentes.
   - les produits AB et BA peuvent être définis et de même taille, en général $AB \neq BA$.

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *et* $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. *Alors on a*

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

pour $i = 1, \ldots, m$ *et* $k = 1, \ldots, p$.

Remarques.

1. Le produit matriciel **N'EST PAS** commutatif :
   - le produit AB peut être défini mais pas le produit BA,
   - les produits AB et BA peuvent être définis mais de tailles différentes.
   - les produits AB et BA peuvent être définis et de même taille, en général $AB \neq BA$.
2. La multiplication des matrices n'étant pas commutative
   $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, en général.

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Alors on a

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

pour $i = 1, \dots, m$ et $k = 1, \dots, p$.

Remarques.

1. Le produit matriciel **N'EST PAS** commutatif :
   - le produit AB peut être défini mais pas le produit BA,
   - les produits AB et BA peuvent être définis mais de tailles différentes.
   - les produits AB et BA peuvent être définis et de même taille, en général $AB \neq BA$.
2. La multiplication des matrices n'étant pas commutative
   $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, en général.

Proposition

Si le produit AB est défini, alors le produit $B^T A^T$ est aussi défini et l'on a $(AB)^T = B^T A^T$.

Règle pratique du calcul du produit matriciel

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} & & \times & \\ & & \times & \\ & & \times & \\ & & \times & \end{pmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & | & \\ & & | & \\ - & - & | & - \\ & & | & \end{pmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Règle pratique du calcul du produit matriciel

$$\begin{array}{rcl} & \begin{pmatrix} & & \times & \\ & & \times & \\ & & \times & \\ & & \times & \end{pmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & | & \\ - & - & | & - \\ & & | & \end{pmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Remarque. Deux erreurs grossières à éviter.

Règle pratique du calcul du produit matriciel

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} & & \times & \\ & & \times & \\ & & \times & \\ & & \times & \end{pmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & | & \\ & & | & \\ - & - & | & - \\ & & | & \end{pmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Remarque. Deux erreurs grossières à éviter.

- Si $AB = AC$, on ne peut pas simplifier par A pour en déduire que $B = C$. C'est faux en général.

Règle pratique du calcul du produit matriciel

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} & & \times & \\ & & \times & \\ & & \times & \\ & & \times & \end{pmatrix} \leftarrow B \\ A \rightarrow & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & | & \\ & & | & \\ - & - & | & - \\ & & | & \end{pmatrix} \leftarrow AB \end{array}$$

Remarque. Deux erreurs grossières à éviter.

- Si $AB = AC$, on ne peut pas simplifier par A pour en déduire que $B = C$. C'est faux en général.
- Si $AB = 0$, on ne peut pas en déduire que soit $A = 0$ soit $B = 0$. C'est faux en général.
  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$!

Définition

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit les puissances successives de A par

- $A^0 = I_n$,
- $A^{p+1} = A^p A = AA^p$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.

Exemple.

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **inversible** *si et seulement si il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$AA' = A'A = I_n.$$

Naturellement, on note $A' = A^{-1}$.

Exemple.

Théorème

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Théorème

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proposition

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est inversible si et seulement si* $\mathrm{rg}\,(A) = n$*, si et seulement si* $\ker(A) = \{0\}$.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et soit* $b \in \mathbb{R}^n$. *Le système linéaire* $Ax = b$ *admet une solution et une seule si et seulement si* A *est inversible. Dans ce cas on a*

$$x = A^{-1}b.$$

Démonstation.

Lien avec les applications linéaires

Dans tout ce qui suit E_i est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
On vérifie facilement que l'ensemble des applications linéaires de E_1 dans E_2 peut-être muni

Lien avec les applications linéaires

Dans tout ce qui suit E_i est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
On vérifie facilement que l'ensemble des applications linéaires de E_1 dans E_2 peut-être muni

- d'une addition

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E_1, E_2), \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Lien avec les applications linéaires

Dans tout ce qui suit E_i est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
On vérifie facilement que l'ensemble des applications linéaires de E_1 dans E_2 peut-être muni

- d'une addition

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E_1, E_2), \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

- et d'une multiplication par un scalaire

$$\forall f \in \mathcal{L}(E_1, E_2), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Lien avec les applications linéaires

Dans tout ce qui suit E_i est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
On vérifie facilement que l'ensemble des applications linéaires de E_1 dans E_2 peut-être muni

- d'une addition

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E_1, E_2), \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

- et d'une multiplication par un scalaire

$$\forall f \in \mathcal{L}(E_1, E_2),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

qui en font un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Lien avec les applications linéaires

Soient E_1, E_2 et E_3 des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ muni des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, respectivement .

Lien avec les applications linéaires

Soient E_1, E_2 et E_3 des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ muni des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, respectivement .

Théorème

Soient f et g deux applications linéaires de E_1 dans E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et soit B la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Alors

Lien avec les applications linéaires

Soient E_1, E_2 et E_3 des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ muni des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, respectivement .

Théorème

Soient f et g deux applications linéaires de E_1 dans E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et soit B la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Alors

- *la matrice de $f+g$ dans ces mêmes bases est $A+B$,*

Lien avec les applications linéaires

Soient E_1, E_2 et E_3 des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ muni des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, respectivement .

Théorème

Soient f et g deux applications linéaires de E_1 dans E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et soit B la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Alors

- *la matrice de $f + g$ dans ces mêmes bases est $A + B$,*
- *la matrice de λf est λA.*

Lien avec les applications linéaires

Soient E_1, E_2 et E_3 des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ muni des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, respectivement .

Théorème

Soient f et g deux applications linéaires de E_1 dans E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et soit B la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Alors

- *la matrice de $f + g$ dans ces mêmes bases est $A + B$,*
- *la matrice de λf est λA.*

Soit f une application linéaire de E_1 dans E_2 de matrice A dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Soit g une application linéaire de E_2 dans E_3 de matrice B dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.
Alors la matrice de $g \circ f$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$ est BA.

Lien avec les applications linéaires

Soient E_1, E_2 et E_3 des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ muni des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, respectivement .

Théorème

Soient f et g deux applications linéaires de E_1 dans E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et soit B la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Alors

- *la matrice de $f+g$ dans ces mêmes bases est $A+B$,*
- *la matrice de λf est λA.*

Soit f une application linéaire de E_1 dans E_2 de matrice A dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Soit g une application linéaire de E_2 dans E_3 de matrice B dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.
Alors la matrice de $g \circ f$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$ est BA.

Remarque. La multiplication des matrices n'est que la traduction dans des bases de la composition des applications linéaires.

Lien avec les applications linéaires

Soient E_1, E_2 et E_3 des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ muni des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, respectivement .

Théorème

Soient f et g deux applications linéaires de E_1 dans E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et soit B la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Alors

- *la matrice de $f+g$ dans ces mêmes bases est $A+B$,*
- *la matrice de λf est λA.*

Soit f une application linéaire de E_1 dans E_2 de matrice A dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Soit g une application linéaire de E_2 dans E_3 de matrice B dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.
Alors la matrice de $g \circ f$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$ est BA.

Remarque. La multiplication des matrices n'est que la traduction dans des bases de la composition des applications linéaires.

Proposition

f est une application linéaire inversible de E_1 dans E_1 si et seulement si sa matrice A dans la base $\mathcal{B}_1$ est inversible. Dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}_1$ est A^{-1}.

Changement de bases

On a déjà vu le changement de bases pour les composantes dans un même sev de dimension n

Changement de bases

On a déjà vu le changement de bases pour les composantes dans un même sev de dimension n

$$(x)_B = P_{B \to B'} (x)_{B'}.$$

Changement de bases

On a déjà vu le changement de bases pour les composantes dans un même sev de dimension n

$$(x)_B = P_{B \to B'} (x)_{B'}.$$

Proposition

On a $P_{B \to B'}$ est inversible et $(P_{B \to B'})^{-1} = P_{B' \to B}$.

Considérons maintenant le même problème pour une application linéaire et sa matrice dans plusieurs choix de bases.

Changement de bases

Considérons maintenant le même problème pour une application linéaire et sa matrice dans plusieurs choix de bases.

Théorème

Soit E_1 un s.e.v. muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ et soit E_2 un s.e.v. muni de deux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$. Soit f une application linéaire de E_1 dans E_2 et soient A sa matrice dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et A' sa matrice dans les bases et $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$. Alors on a la formule de changement de bases

$$A' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_2 \to \mathcal{B}_2} A \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}'_1}.$$

Changement de bases

Considérons maintenant le même problème pour une application linéaire et sa matrice dans plusieurs choix de bases.

Théorème

Soit E_1 un s.e.v. muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ et soit E_2 un s.e.v. muni de deux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$. Soit f une application linéaire de E_1 dans E_2 et soient A sa matrice dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et A' sa matrice dans les bases et $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$. Alors on a la formule de changement de bases

$$A' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_2 \to \mathcal{B}_2} A \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}'_1}.$$

Corollaire

Dans le cas particulier où $E_1 = E_2, \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'_2$, alors si l'on pose $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}'_1} = P$ la formule de changement de base est

$$A' = \mathcal{P}^{-1} A \mathcal{P}.$$

Inversion d'une matrice par l'algorithme de Gauss–Jordan

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à déterminer $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $AA^{-1} = I_n$. Ceci revient à résoudre n systèmes linéaires de la forme $Ab_j = e_j, j = 1, \ldots, n$. Ce qui revient à considérer n matrices augmentées de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jj} & \ldots & a_{jn} & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix}$$

Les n premières colonnes de ces matrices augmentées étant les mêmes on peut considérer uniquement la matrice augmentée suivante

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)$$

Principe de la méthode : effectuer des opérations élémentaires sur cette matrice augmentée jusqu'à faire apparaître la matrice identité dans le bloc de gauche, c'est–à–dire

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & b_{j1} & \dots & b_{jj} & \dots & b_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Ainsi, le bloc de droite est la matrice inverse A^{-1}.
S'il est impossible d'obtenir la matrice identité dans le bloc de gauche cela signifie que A n'est pas inversible et on dira alors que la matrice A est singulière.

Chapitre 6 : Déterminants

Ce chapitre ne concerne que les matrices carrées. On travaillera systématiquement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Chapitre 6 : Déterminants

Ce chapitre ne concerne que les matrices carrées. On travaillera systématiquement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition et première propriétés. Le déterminant est un e application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui a de nombreuses propriétés importantes, mais dont l'existence est délicate. Nous allons admettre le théorème suivant.

Théorème

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, appelée déterminant, telle que

i) *Le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur-colonne, les autres étant fixés.*

ii) *Si une matrice A a deux vecteurs colonnes égaux, alors son déterminant est nul.*

iii) *Le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.*

Notations. On a plusieurs notations pour les déterminants :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On utilisera aussi la notation associée aux lignes de vecteurs $a_i \in \mathbb{R}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Une application de de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait :

1. la propriété i) est appelée *forme multilinéaire*.
2. Si elle satisfait ii), on dit qu'elle est *alternée*.
3. Le déterminant est la seule forme multilinéaire alternée qui vaut 1 sur la matrice identité.

Quelques propriétés

Quelques propriétés

Proposition

Soit A une matrice $n \times n$ et A' la matrice obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A. Alors on a $\det A' = -\det A$.

Proposition

Soit A une matrice $n \times n$ et A' la matrice obtenue en ajoutant à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A. Alors on a $\det A' = \det A$.

Preuve. Soit $A = (a_1 \dots a_i \dots a_n)$ et soient des scalaires λ_j, $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$. On pose

$$A' = (a_1 \dots a_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} \lambda_j a_j \dots a_n).$$

Par linéarité par rapport à la colonne i, on en déduit

$$\det A' = \det A + \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} \lambda_j \det(a_1 \dots a_j \dots a_n).$$

Quelques propriétés

Quelques propriétés

Corollaire

Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes alors $\det A = 0$.

Déterminants et matrices inversibles

Un des usages des déterminants est de caractériser les matrices inversibles.

Déterminants et matrices inversibles

Un des usages des déterminants est de caractériser les matrices inversibles.

Proposition

Si A est une matrice triangulaire supérieure ou inférieure, alors on

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{i=n} a_{ii}$$

Théorème

Une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$

Quelques propriétés

Quelques propriétés

Corollaire

Le déterminant est unique.

Théorème

On a

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Quelques propriétés

Quelques propriétés

Corollaire

Si A est inversible alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Corollaire

On a

$$\det(A^{t}) = \frac{1}{\det A}.$$

Remarque. Tout ce que l'on a dit des déterminants à propos des colonnes est donc vrai pour les lignes !

Corollaire

Deux matrices semblables ont même déterminant.

Avertissements. Le déterminant n'est pas linéaire !

1. D'une part,
$$\det(A+B) \neq \det A + \det B.$$
En effet, pour
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$\det(A+B) = 0$, tandis que $\det(A) + \det(B) = 2$.
2. D'autre part,
$$\det(\lambda A) \neq \lambda \det A.$$
En effet, $\det(\lambda A) = \det((\lambda I_n)A) = \det(\lambda I_n)\det(A) = \lambda^n \det A$.

Avertissements. Le déterminant n'est pas linéaire !

1. D'une part,
$$\det(A+B) \neq \det A + \det B.$$
En effet, pour
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$\det(A+B) = 0$, tandis que $\det(A) + \det(B) = 2$.
2. D'autre part,
$$\det(\lambda A) \neq \lambda \det A.$$
En effet, $\det(\lambda A) = \det((\lambda I_n)A) = \det(\lambda I_n)\det(A) = \lambda^n \det A$.

Cofacteurs, développements du déterminant

Cofacteurs, développements du déterminant

Définition

Soit A une matrice $n \times n$ et A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A. On appelle mineur de A relatif à a_{ij} le déterminant $\Delta_{ij} = \det A_{ij}$. On appelle cofacteur de A relatif à a_{ij} le nombre

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Théorème

(Développement par rapport à la première ligne) On a la formule suivante :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{1j} C_{1j}.$$

Cofacteurs, développements du déterminant

Cofacteurs, développements du déterminant

Proposition

(Développement par rapport à la ième ligne ou jème colonne) On a les formules suivantes :

$$\forall i, \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} C_{ij}.$$

$$\forall j, \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} C_{ij}.$$

Cofacteurs, développements du déterminant

Cofacteurs, développements du déterminant

Définition

On introduit la matrice des cofacteurs de A, cof $A = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Il s'agit d'une matrice $n \times n$. Noter la disposition en échiquier des signes $(-1)^{i+j}$, commençant par un $+$ au coin supérieur gauche :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots & (-1)^{1+n} \\ + & - & + & \dots & (-1)^{2+n} \\ + & - & + & \dots & (-1)^{3+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Cofacteurs, développements du déterminant

Cofacteurs, développements du déterminant

Théorème

On a pour toute matrice A :

$$A(cof\ A)^t = (cof\ A)^t A = (\det A) I_n.$$

En particulier, si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(cof\ A)^t$$

Remarque. Sauf pour $n = 2$, ou pour des matrices très particulières, ce n'est pas la bonne façon de calculer explicitement l'inverse d'une matrice.

Cofacteurs, développements du déterminant

Cofacteurs, développements du déterminant

Théorème

(Formule de Cramer) Soit A une matrice inversible. L'unique solution du système linéaire $Ax = b$ est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det A}$$

où $A_i(b) = (a_1 \ a_2 \ \ldots \ b \ \ldots \ a_n)$ est la matrice A dans laquelle on a remplacé la colonne a_i par b.

Remarque. Sauf pour $n = 2$, à l'extrême rigueur $n = 3$, ou pour des matrices très particulière, ce n'est pas la bonne façon de résoudre un système linéaire. On a intérêt à utiliser la méthode de Gauss dès que $n \geq 3$