Université de Rouen
Master 1, MFA 2010–2011
Analyse numérique des EDP

Eléments finis en dimension 2

---

1. Intégration de polynômes dans un triangle

a) Soit $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$I(k_1, k_2) = \int_0^1 t^{k_1}(1-t)^{k_2}\, dt = \frac{k_1!k_2!}{(k_1+k_2+1)!}.$$

b) On considère le triangle de référence T^* qui a pour sommets $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$. Déduire de la question précédente que $\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_{T^*} x^{k_1} y^{k_2} (1-x-y)^{k_3}\, dx\, dy = \frac{k_1!k_2!k_3!}{(k_1+k_2+k_3+2)!}.$$

[On intégrera d'abord par rapport à y en faisant un changement de variables approprié.]

c) Plus généralement, on considère un triangle T non dégénéré et on note $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ses coordonnées barycentriques. Montrer que $\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_T \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3}\, dx\, dy = 2\,\mathrm{mes}(T) \frac{k_1!k_2!k_3!}{(k_1+k_2+k_3+2)!}.$$

[On écrira T comme l'image de T^* par une application affine que l'on explicitera.]

2. Eléments finis triangulaires de type k

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on souhaite définir un élément fini (T, P_k, Σ_k) où T est un triangle du plan non dégénéré, P_k l'ensemble des polynômes à deux variables de degré $\leq k$ et Σ_k, l'ensemble des points de T dont les coordonnées barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ par rapport aux sommets de T sont telles que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{0, \ldots, \frac{i}{k}, \ldots, 1\}$ (et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$).

a) On commence par considérer l'élément fini de référence où T est le triangle de sommets $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ de sorte que les coordonnées barycentriques sont données respectivement par x, y et $1-x-y$. On a donc $\Sigma_k = \{(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}) \mid i, j \in \mathbb{N},\ 0 \leq i+j \leq k\}$.

   i) Dessiner Σ_k.

   ii) Montrer que $\mathrm{Card}\,\Sigma_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

   iii) Montrer que $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. [On pourra établir une bijection entre Σ_k et les monômes de P_k.]

   iv) Etant donné $a_{m,n} = (\frac{m}{k}, \frac{n}{k}) \in \Sigma_k$, on définit le polynôme

$$p_{m,n}(x,y) = \frac{\prod_{i<m}(kx-i)}{m!} \frac{\prod_{j<n}(ky-j)}{n!} \frac{\prod_{m+n<l\leq k}(l-kx-ky)}{(k-m-n)!}.$$

   Montrer que $p_{m,n} \in P_k$ et que $p_{m,n}(a_{m',n'}) = \delta_{mm'}\delta_{nn'}$.

   v) Conclure que les polynômes $\{p_{m,n} \mid 0 \leq m+n \leq k\}$ forment une base de P_k.

   vi) Donner une interprétation graphique de la construction de $p_{m,n}$.

b) On considère maintenant le cas d'un triangle quelconque non dégénéré.

i) Dessiner l'ensemble Σ_k correspondant.

ii) Déterminer, en fonction des coordonnées barycentriques, les polynômes de base associée à l'élément fini (T, P_k, Σ_k).

3. Eléments finis quadrangulaires de type k

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on souhaite définir un élément fini (T, Q_k, Σ_k) où T est un parallélogramme du plan non dégénéré, Q_k, l'ensemble des polynômes à deux variables de degré partiel $\leq k$ (i.e., de la forme $\sum_{i,j \leq k} a_{ij} x^i y^j$) et Σ_k, l'ensemble des points de T dont les coordonnées (π_1, π_2) dans le repère associé à T sont telles que $\pi_1, \pi_2 \in \{0, \ldots, \frac{i}{k}, \ldots, 1\}$.

a) On commence par considérer l'élément fini de référence $[0,1]^2$ de sorte que $\pi_1 = x$ et $\pi_2 = y$. On a donc $\Sigma_k = \{(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}) \mid i, j \in \mathbb{N},\, i, j \leq k\}$.

i) Dessiner Σ_k.

ii) Montrer que $\operatorname{Card} \Sigma_k = \dim P_k = (k+1)^2$.

iii) Etant donné $a_{m,n} = (\frac{m}{k}, \frac{n}{k}) \in \Sigma_k$, déterminer le polynôme $q_{m,n} \in Q_k$ tel que $q_{m,n}(a_{m',n'}) = \delta_{mm'} \delta_{nn'}$. Pourquoi est-il unique ?

b) On considère maintenant le cas d'un parallélogramme quelconque non dégénéré.

i) Dessiner l'ensemble Σ_k correspondant.

ii) Déterminer, en fonction des coordonnées (π_1, π_2), les polynômes de base associée à l'élément fini (T, P_k, Σ_k).

iii) Qu'obtient-on lorsque T est un rectangle de côtés parallèles aux axes ?

4. Mise en œuvre de la méthode des éléments finis triangulaires

On souhaite écrire la méthode des éléments finis pour la résolution de l'équation avec conditions au bord de type Dirichlet

$$-\Delta u = 1 \quad \text{dans } \Omega =]0,1[^2 \qquad \text{et} \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on associe à Ω la triangulation uniforme suivante. On divise $\overline{\Omega}$ en $(N+1)^2$ carrés de côtés de longueur $h = \frac{1}{N+1}$ et on coupe chaque carré le long de sa diagonale de direction $(1, -1)$. Les nœuds de ce treillis sont numérotés de droite à gauche et de haut en bas.

a) *Eléments finis de type 1 (affines)*

i) On considère d'abord un élément fini élémentaire triangulaire de type 1, que l'on note (T, P_1, Σ_1). T sera le triangle de sommets $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ et Σ_1, l'ensemble de ses sommets. Rappeler l'expression des polynômes de base $\omega_1, \ldots, \omega_3$.

ii) Déterminer les matrice et vecteur élémentaires $K \in M_3$ et $L \in \mathbb{R}^3$ dont les composantes sont données par $K_{ij} = \int (\nabla \omega_i, \nabla \omega_j)$ et $L_i = \int \omega_i$.

iii) Quelles sont les matrice et vecteur élémentaires associés à l'élément fini correspondant au triangle de sommets $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$? En déduire les matrice et vecteur K^h et L^h lorsque l'élement fini correspond à l'image d'un des deux triangles précédents par une homothétie de rapport h.

iv) Rappeler l'espace fonctionnel approché. Donner l'expression de la base canonique associée à la triangulation considérée. Dessiner les fonctions de base.

v) Ecrire le système linéaire associé au problème variationnel approché, en mettant en évidence sa structure par blocs.

vi) Rappeler l'expression de la solution approchée u_h en fonction de la solution du système linéaire précédent.

vii) Ecrire explicitement le système linéaire lorsque $h = \frac{1}{3}$. Donner alors la solution approchée $u_{\frac{1}{3}}$ et la dessiner.

viii) Déterminer la solution explicite u de l'équation. Comment peut se majorer l'erreur d'approximation $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$?

b) *Eléments finis de type 2 (quadratiques)*

i) On considère l'élément fini de référence (T, P_2, Σ_2) où le triangle T a pour de sommets $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ et où Σ_2 est constitué des points $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},0)$. Rappeler l'expression des polynômes de base $\omega_1,\ldots,\omega_6$ en fonction des coordonnées barycentriques $\lambda_1(=x)$, $\lambda_2(=y)$, $\lambda_3(=1-x-y)$.

ii) Vérifier que les matrice et vecteur élémentaires sont donnés par

$$K_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & -8 & -8 \\ -4 & 0 & -4 & -8 & 16 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -8 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[On écrira les expressions $\nabla\omega_i$ en fonction des λ_i et on rappellera la valeur des intégrales sur T suivantes : $\int 1$, $\int \lambda_i$, $\int \lambda_i^2$, $\int \lambda_i\lambda_j$ (pour $i \neq j$).]

iii) Ecrire le système linéaire associé au problème variationnel approché. On donnera la structure par blocs de la matrice et, pour chaque bloc, on déterminera les termes non nuls.

iv) Comment peut se majorer l'erreur d'approximation $\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$?

5. Mise en œuvre de la méthode des éléments finis quadrangulaires

On souhaite écrire la méthode des éléments finis pour la résolution de l'équation

$$-\Delta u + cu = 1 \quad \text{dans } \Omega =]0,1[^2$$

avec l'une des trois conditions au bord suivantes

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{(Dirichlet)}; \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{(Neumann)};$$
$$u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0\,\forall y \in]0,1[,\ u_y(x,0) = u(x,1) = 0\,\forall x \in]0,1[\quad \text{(mixte)}.$$

On suppose $c \geq 0$.

a) On considère d'abord un élément fini élémentaire carré de type 1 noté (T, Q_1, Σ_1). T sera donc un carré de côtés parallèles aux axes et Σ_1, l'ensemble de ses sommets.

i) Lorsque l'élément fini est le carré de référence $[0,1]^2$, rappeler l'expression des polynômes de base $\omega_1,\ldots,\omega_4$.

ii) Déterminer les matrices et vecteurs élémentaires $K_0, K_1 \in M_4$ et $L \in \mathbb{R}^4$ dont les composantes sont données par $(K_0)_{ij} = \int_{[0,1]^2} \omega_i\omega_j$, $(K_1)_{ij} = \int(\nabla\omega_i, \nabla\omega_j)$ et $L_i = \int \omega_i$.

iii) En déduire les matrices et vecteurs K_0^h, K_1^h et L^h lorsque l'élement fini est un carré de côté de longueur h.

b) Pour $N \in \mathbb{N}$, on associe à Ω la triangulation uniforme consituée de $(N+1)^2$ carrés de côtés de longueur $h = \frac{1}{N+1}$. Les nœuds de ce treillis sont numérotés de droite à gauche et de haut en bas.

i) Pour les diverses conditions au bord, rappeler l'espace fonctionnel d'approximation associé au problème variationnel approché. En donner une base en fonction des polynômes de base de la question précédente. Dessiner les fonctions de base ainsi obtenues.

ii) Pour le problème de Dirichlet, donner l'expression du système linéaire associé au problème variationnel approché. On mettra en évidence la structure par blocs du système linéaire et on séparera les contributions de l'opérateur du second ordre (construit à partir de K_1^h) des contributions de l'opérateur d'ordre 0 (construit à partir de K_0^h).

iii) Ecrire le système linéaire associé au problème de Neumann en insistant sur les éléments qui diffèrent de ceux du problème de Dirichlet.

iv) Même question pour le problème avec conditions au bord mixtes.

6.

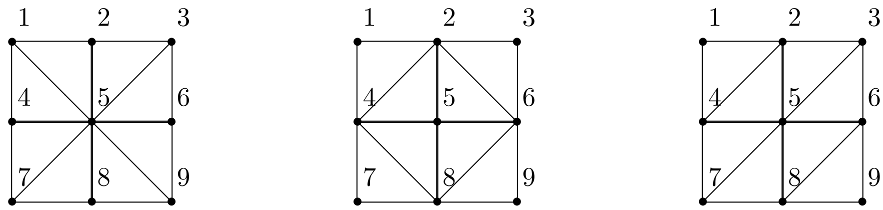
A un ouvert Ω, on associe une triangulation uniforme quadrangulaire de type 1 (par exemple). La matrice du système linéaire du problème variationnel approché dépend alors de la numérotation choisie pour les nœuds.

Dans la pratique, on cherche une numérotation qui minimise la largeur de la bande de la matrice. Pourquoi ?

Déterminer formellement la numérotation optimale lorsque Ω est le carré $]0,1[^2$, le rectangle $]0,1[\times]0,2[$ ou le triangle de sommets $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$.

7.

Parmi les triangulations suivantes du carré $]0,1[^2$ (numérotées de gauche à droite et de haut en bas), déterminer celle qui est préférable. Pourquoi ?



8.

On considère le problème avec conditions au bord mixtes

$$-\Delta u = 1 \quad \text{dans } \Omega =]0,1[^2$$

$$\text{et} \quad a(y)u(0,y) - u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0 \, \forall y \in]0,1[, \qquad u_y(x,0) = u_y(x,1) = 0 \, \forall x \in]0,1[$$

avec $a \in L^\infty(]0,1[)$ vérifiant $a(y) \geq \alpha > 0$ p.p.

a) Déterminer la formulation variationnelle associée à l'équation précédente.

b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall u \in H^1(\Omega)$ on a

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\| \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^1 |u(0,y)|^2 \, dy).$$

[On commencera par montrer que $\forall u \in C^1(\overline{\Omega})$, $\forall y \in]0,1[$, on a $\int_0^1 u(x,y)^2 \, dx \leq 2u(0,y)^2 + 4 \int_0^1 u_x(x,y)^2 \, dx$, en suivant la démonstration de l'inégalité de Poincaré.]

c) En déduire que le problème variationnel admet une unique solution.

d) Ecrire le système linéaire associé à une triangulation uniforme quadrangulaire de type 1 dont les éléments de base sont des carrés de côté de longueur $h = \frac{1}{2}$. Pour simplifier, on prendra la fonction a constante.

9.

On considère le problème avec conditions au bord mixtes dans le triangle $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leq x, \, 0 \leq y, \, x+y \leq 1\}$

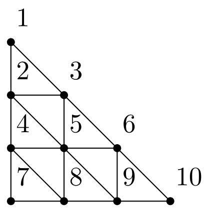
$$-\Delta u = 1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\text{et} \quad u(x, 1-x) = 1, \, u_x(0,x) = 0, \, u(x,0) - u_y(x,0) = 0, \, \forall x \in]0,1[.$$

a) Déterminer la formulation variationnelle associée à l'équation précédente. [On posera $v = u - 1$ et on déterminera la formulation variationnelle du problème associé à l'équation satisfaite par v.]

b) Montrer que le problème variationnel admet une unique solution.

c) On considère la triangulation uniforme triangulaire suivante.



i) Ecrire le système linéaire associé au problème approché pour v.

ii) Comment se déduit la solution approchée u_h pour le problème initial ?

10. Lemme de Bramble-Hilbert

Soit Ω un ouvert convexe borné de $\mathbb{R}^2$. On utilisera les notations suivantes. Pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$, on définit sur $C^n(\overline{\Omega})$ les semi-normes

$$|u|_{m,\overline{\Omega}} = |u|_m = \max_{\overline{\Omega}} \max_{i+j=m} |\partial_1^i \partial_2^j u(x_1, x_2)|$$

et la norme $\|u\|_{n,\overline{\Omega}} = \|u\|_n = \max_{m \leq n} |u|_m$.

Pour $k, l \in \mathbb{N}$ fixés, on considère un opérateur continu T de $C^{k+1}(\overline{\Omega})$ dans $C^l(\overline{\Omega})$ tel que $Tp = 0 \; \forall p \in P_k$ (l'ensemble des polynômes de degré $\leq k$). Il existe donc une constante $C > 0$ telle que $\|Tu\|_l \leq C\|u\|_{k+1} \; \forall u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$. On va montrer qu'en fait il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|Tu\|_l \leq C|u|_{k+1}, \qquad \forall u \in C^{k+1}(\overline{\Omega}).$$

a) Formule de Taylor.

i) Pour toute fonction $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ et $m \leq k+1$, on note $d^m u(x)$ sa différentielle d'ordre m au point x. On rappelle que sa norme, en tant que forme l-linéaire, est définie par

$$\|d^m u(x)\| = \sup\{|d^m u(x) \cdot (h_1, \ldots, h_m)| \mid |h_i| \leq 1 \, \forall i\}.$$

Montrer qu'il existe deux constantes α et $\beta > 0$ telles que

$$\alpha |u|_m \leq \sup_{\overline{\Omega}} \|d^m u(x)\| \leq \beta |u|_m, \qquad \forall u \in C^m(\overline{\Omega}).$$

ii) On fixe $a \in \Omega$. Rappeler pourquoi $\forall x \in \overline{\Omega}$, il existe $t \in]0, 1[$ tel que

$$u(x) = \sum_{i \leq m-1} \frac{1}{i!} d^i u(a) \cdot (x-a, \ldots, x-a) + \frac{1}{m!} d^m u(a + t(x-a)) \cdot (x-a, \ldots, x-a).$$

b) i) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, $\forall u \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ vérifiant $\partial_1^i \partial_2^j u(a) = 0 \; \forall i + j \leq m$, on a $\|u\|_0 \leq C|u|_{m+1}$.

ii) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, $\forall u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ vérifiant $\partial_1^i \partial_2^j u(a) = 0 \; \forall i + j \leq k$, on a $\|u\|_{k+1} \leq C|u|_{k+1}$.

iii) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ il existe $p \in P_k$ avec

$$\|u - p\|_{k+1} \leq C|u|_{k+1}.$$

c) Conclure qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|Tu\|_l \leq C|u|_{k+1}, \qquad \forall u \in C^{k+1}(\overline{\Omega}).$$

11. Convergence de la méthode des éléments finis

Soit Ω un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^2$ auquel on associe une triangulation $\mathcal{T}_h$ de sorte que $\overline{\Omega} = \bigcup_{T_h \in \mathcal{T}_h} T_h$. Pour simplifier, on suppose que la triangulation est uniforme au sens où, à chaque T_h, correspond un élément fini qui est déduit d'éléments finis de référence compatibles par une homothétie de rapport $h > 0$. Le nombre de ces éléments finis de référence est, bien sûr, indépendant de h. On suppose que les éléments finis de référence (T, Σ, P) sont de type Lagrange et que l'espace fonctionnel P associé contient l'espace P_k des polynômes de degré $\leq k$.

On note $(a_i^h)_{1 \leq i \leq N}$ l'ensemble des nœuds associés à cette triangulation. Les fonctions de base ω_i^h de l'espace fonctionnel d'approximation sont déduites des éléments finis de référence (par homothétie et recollement) et sont caractérisées par $\omega_i^h(a_j^h) = \delta_{ij}$; elles sont continues, à cause de l'hypothèse de compatibilité des éléments finis de référence. On note enfin Π_h l'opérateur d'interpolation associée défini $\forall u \in C(\overline{\Omega})$ par $\Pi_h u = \sum u(a_i^h)\, \omega_i^h$.

L'objet de l'exercice est d'estimer, lorsque u est suffisamment régulière, l'erreur d'interpolation $\|u - \Pi_h u\|_{H^1(\Omega)}$.

a) Donner des exemples de triangulation uniforme satisfaisant les hypothèses précédentes. [On les choisira quadrangulaires de type k ou triangulaires de type k.] Préciser les éléments finis de référence et rappeler comment se déduisent les nœuds a_i^h et les fonctions de base ω_i^h associés.

b) On se place, pour cette question seulement, dans un élément fini de référence (T, Σ, P). T est donc de la forme $\overline{\Omega}$ avec Ω ouvert convexe borné de R^2, et Σ est la collection de n points de $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ distincts. On lui associe une base canonique (ω_i). On rappelle que P est constitué de polynômes contenant P_k. L'opérateur de P-interpolation est alors donné par $\Pi u = \sum u(a_i)\, \omega_i$.

   i) Montrer que l'on a $\Pi u = u\ \forall u \in P$.

   ii) Vérifier que Π est un opérateur continu de $C(T)$ dans $C^1(T)$.

   iii) Déduire de l'exercice précédent qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall u \in C^{k+1}(T)$ on a
$$\|u - \Pi u\|_{1,T} \leq C |u|_{k+1,T}.$$

c) i) Soit $T_h \in \mathcal{T}_h$ fixé. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que $\forall u \in C^{k+1}(T_h)$ on a
$$|u - \Pi u|_{0,T_h} \leq C h^{k+1} |u|_{k+1,T_h} \qquad \text{et} \qquad |u - \Pi u|_{1,T_h} \leq C h^k |u|_{k+1,T_h}.$$
[On fixera a tel que $T_h = a + hT$, avec T élément fini de référence, et on considèrera la fonction définie sur T par $\tilde{u}(t) = u(a + th)$.]

   ii) Conclure qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall h \leq 1$, $\forall u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ on a
$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{k+1} |u|_{k+1,\overline{\Omega}} \qquad \text{et} \qquad \|u - \Pi_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq C h^k |u|_{k+1,\overline{\Omega}}.$$

d) Comment s'interprète le résultat précédent lorsqu'il est appliqué à l'approximation d'un problème variationnel ?