Eléments finis en dimension 1

1. Méthode de Galerkin

Soit V un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de V. On note V_m le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_k \mid 0 \le k \le m\}$. Etant donnée une forme bilinéaire continue elliptique a et une forme linéaire continue F, on note u la solution du problème variationnel : $u \in V$ et $a(u,v) = F(v)\ \forall v \in V$. On note u_m la solution du problème discret : $u_m \in V_m$ et $a(u_m, v_m) = F(v_m)\ \forall v_m \in V_m$.

a) Montrer que $u_m \to u$. [On montrera que $|u - u_m| \le C d(u, V_m)$ en utilisant le fait que $a(u - u_m, v_m) = 0\ \forall v_m \in V_m$.]

b) Si a est symétrique, que peut-on dire de la suite $J(u_m)$ (en posant $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - F(v)$) ?

2.

Soit V_h un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert V. On approche le problème variationnel : $u \in V$ et $a(u,v) = F(v)\ \forall v \in V$ par le problème : $u_h \in V_h$ et $a_h(u_h, v_h) = F_h(v_h)\ \forall v_h \in V_h$, où a et a_h sont des formes bilinéaires continues elliptiques et F et F_h sont des formes linéaires continues.

a) Etablir l'estimation

$$|u - u_h| \le \frac{\|a\|}{\alpha} d(u, V_h) + \frac{1}{\alpha}\|F_h - F\| + \frac{\|F_h\|}{\alpha\alpha_h}\|a_h - a\|$$

avec $\|F\| = \sup\{F(v) \mid |v| \le 1\}$, $\|a\| = \sup\{a(v,w) \mid |v|, |w| \le 1\}$ et $\alpha = \inf\{a(v,v) \mid |v| = 1\}$. [On traitera d'abord séparément les cas $V_h \ne V$, $F_h \ne F$ et $a_h \ne a$.]

b) Montrer que si $F_h \to F$, si $a_h \to a$ et si $d(u, V_h) \to 0$ quand $h \to 0$, alors on a $u_h \to u$. [On justifiera que $\alpha_h \to \alpha$.]

c) Comment améliorer l'estimation précédente lorsque a est symétrique ?

3.

On souhaite approcher la solution u de l'équation différentielle

$$-(pu')' + qu = f \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{et} \quad u(0) = u(1) = 0,$$

pour p, q, f continues avec $p > 0$ et $q \ge 0$ sur $[0,1]$. On fixe un pas h et on considère une collection de nœuds $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = 1$ (avec $h = \max(x_{i+1} - x_i)$). On définit alors sur $H^1(]0,1[)$ les fonctions

$$a_h(v,w) = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'w' + \sum_{i=0}^{n} q(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} vw \qquad \text{et} \qquad F_h(v) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} v.$$

On note V_h l'ensemble des fonctions continues, affines par morceaux et nulles en 0 et 1.

a) Rappeler pourquoi l'équation différentielle précédente admet une unique solution.

b) Montrer qu'il existe une unique solution u_h du problème variationnel discret $a_h(u_h, v_h) = F_h(v_h)\ \forall v_h \in V_h$. Quel est l'intérêt de considérer ce problème plutôt que le problème discret classique ?

c) Montrer que $u_h \to u$ dans $H^1(]0,1[)$ quand $h \to 0$.

d) Ecrire le système linéaire associé au problème discret précédent dans la base canonique de V_h.

4.

On souhaite écrire la méthode des éléments finis pour les équations différentielles d'ordre 2 de type $-u'' + cu = f$. On se place dans $]0,1[$. On fixe une constante $c > 0$ et on prendra $f \equiv 1$ pour simplifier.
Etant donné $n \in \mathbb{N}$, on pose $h = \frac{1}{n+1}$ et on considère le cas de nœuds équidistants $x_i = ih$ pour $0 \leq i \leq n+1$. Le sous-espace V_h des élements finis sera un sous-espace vectoriel de $H^1(]0,1[)$ composé des fonctions continues sur $[0,1]$, affines sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$; la base sera composée des fonctions canoniques ω_i de V_h satisfaisant les conditions au bord convenables.
Pour chacune des équations, on suivra le programme suivant.

i) Rappeler la formulation variationnelle.

ii) Préciser le sous-espace vectoriel V_h.

iii) Ecrire le système linéaire associé au problème discret.

iv) Résoudre le système pour $h = \frac{1}{2}$.

v) Déterminer la solution explicite.

Pour tous les calculs, on prendra les constantes $(a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta)$ égales à 1.

a) *Condition de Dirichlet homogène.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } u(0) = u(1) = 0.$$

b) *Condition de Dirichlet non homogène.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } u(0) = a \text{ et } \ u(1) = b.$$

c) *Condition de Neumann homogène.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } u'(0) = u'(1) = 0.$$

d) *Condition de Neumann non homogène.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } u'(0) = -a \text{ et } \ u'(1) = b.$$

e) *Condition de Robin homogène.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } \ -u'(0) + \alpha u(0) = 0 \text{ et } \ u'(1) + \beta u(1) = 0.$$

f) *Condition périodique.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } u(0) = u(1) \text{ et } \ u'(0) = u'(1).$$

5. Interpolation par des fonctions polynomiales par morceaux

a) *Interpolation de Lagrange et de Hermite.*

i) Soit $u \in H^2(]0,1[)$. On note P la fonction affine d'interpolation de Lagrange vérifiant $P(0) = u(0)$ et $P(1) = u(1)$.
Rappeler l'expression de P. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $u'(c) = P'(c)$. En déduire que

$$\int_0^1 |u' - P'|^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |u''|^2 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 |u - P|^2 \leq \frac{1}{4} \int_0^1 |u''|^2.$$

Comment les inégalités s'interprètent-elles dans $H^2(]0,1[) \cap H^1_0(]0,1[)$?

ii) On suppose maintenant que $u \in H^4(]0,1[)$ et on note Q le polynôme d'interpolation de Hermite de degré ≤ 3 vérifiant $Q(0) = u(0)$, $Q'(0) = u'(0)$, $Q(1) = u(1)$ et $Q'(1) = u'(1)$.

Rappeler l'expression de Q. Montrer que si $0 \leq k \leq 3$ on a $\int_0^1 |u^{(k)} - Q^{(k)}|^2 \leq 2^{k-4} \int_0^1 |u^{(4)}|^2$.

iii) Comment s'étend le résultat précédent si $u \in H^{2m+2}(]0,1[)$ pour $m \in \mathbb{N}$?

b) *Fonctions polynomiales par morceaux.* On fixe maintenant $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ et $(n+2)$ points tels que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$. On pose $h_i = x_{i+1} - x_i$ et $h = \max h_i$.

i) Soit $u \in H^2(]a,b[)$. On note Pu la fonction affine par morceaux définie par $Pu(x_i) = u(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n+1$.

Montrer que $\|u' - (Pu)'\|_{L^2(]a,b[)} \leq \frac{h}{\sqrt{2}}\|u''\|_{L^2}$ et que $\|u - (Pu)\|_{L^2} \leq \frac{h^2}{2}\|u''\|_{L^2}$ En déduire que

$$\|u - Pu\|_{H^1(]a,b[)} \leq h\|u''\|_{L^2(]a,b[)} \qquad (*)$$

lorsque $h \leq 1$.

ii) Etablir un résultat analogue lorsque $u \in H^4(]a,b[)$ et que Qu est le polynôme par morceaux de degré ≤ 3 caractérisé par $Qu(x_i) = u(x_i)$ et $(Qu)'(x_i) = u'(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n+1$.

iii) Plus généralement, soit $u \in H^{2m+2}(]a,b[)$ pour $m \in \mathbb{N}$. On note Ru la fonction polynomiale par morceaux de degré $\leq 2m+1$ caractérisée par $(Ru)^{(k)}(x_i) = u^{(k)}(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n+1$ et $0 \leq k \leq m$.

Montrer que l'on a l'inégalité

$$\|u - Ru\|_{H^1(]a,b[)} \leq h^{2m+1}\|u^{(2m+2)}\|_{L^2(]a,b[)}$$

lorsque $h \leq 1$.

c) i) Soit $\beta > -\frac{1}{2}$. On pose $\gamma = \inf\{\int_0^1 |x^\beta - a|^2\,dx \mid a \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\gamma \neq 0$ si et seulement si $\beta \neq 0$.

ii) Pour $\alpha > \frac{1}{2}$ on pose sur $[0,1]$ $u(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$. Montrer que $u \in H^1(]0,1[)$. Montrer que $u \in H^2(]0,1[)$ si et seulement si $\alpha > \frac{3}{2}$.

iii) Pour $h = \frac{1}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$, on note $P_h u$ l'interpolation affine par morceaux de u de Lagrange aux points équidistants $x_i = ih$. Déduire de (c–i) que $\|u - P_h u\|_{H^1(]0,1[)} \geq \sqrt{\gamma} h^{\alpha - \frac{1}{2}}$.

iv) Conclure que la puissance de h dans l'inégalité $(*)$ ne peut pas être améliorée et qu'en général, si $u \notin H^2(]0,1[)$, $P_h u$ ne converge pas vers u dans $H^1(]0,1[)$ comme un $O(h)$.

6.

On rappelle que $H_0^2(]0,1[)$ désigne l'ensemble des fonctions $u \in H^2(]0,1[)$ telles que $v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0$. C'est un espace de Hilbert pour la norme $\|v\|_{H^2} = (\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$.

a) Montrer que la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1((v'')^2 + (v')^2 + v^2) - \int_0^1 v$ admet un unique minimum dans $H_0^2(]0,1[)$.

b) En déduire que l'équation

$$u^{(4)} - u'' + u = 1 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,1[) \qquad \text{et} \qquad u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \qquad (*)$$

admet une unique solution $u \in H^2(]0,1[)$. Montrer que u est de classe C^∞.

c) Donner la solution explicite de l'équation différentielle $(*)$ précédente.

d) On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose $h = \frac{1}{n+1}$ et $x_i = ih$ pour $0 \leq i \leq n+1$. On note V_h l'ensemble des fonctions v de classe C^1 qui coïncident avec un polynôme de degré ≤ 3 sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et vérifient $v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0$.

i) Pour tout $1 \leq i \leq n$, montrer qu'il existe dans V_h une unique fonction e_i et une unique fonction f_i telles que $e_i(x_j) = \delta_{ij}$, $e_i'(x_j) = 0$, $f_i(x_j) = 0$ et $f_i'(x_j) = \delta_{ij}$.

ii) Montrer que la collection des $\{e_i, f_i\}$ forme un base de V_h. Quelle sont, dans cette base, les coordonnées des élements de V_h ?

iii) Déterminer explicitement e_i et f_i et en dessiner le graphe.

e) On ordonne les vecteurs de la base précédente de la façon suivante $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$. Quels sont les éléments $\neq 0$ de la matrice du système linéaire associé au problème discret ?

f) Soit $v \in C^4([0,1])$ telle que $v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0$. On pose $Pv = \sum v(x_i)e_i + \sum v'(x_i)f_i$.

i) Montrer que $\forall i$, $\exists \xi \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que $v^{(3)}(\xi) = (Pv)^{(3)}(\xi)$.

ii) En déduire que $\|v'' - (Pv)''\|_{L^\infty} \leq h^2 \|v^{(4)}\|_{L^\infty}$, $\|v' - (Pv)'\|_{L^\infty} \leq h^3 \|v^{(4)}\|_{L^\infty}$, et que $\|v - (Pv)\|_{L^\infty} \leq h^4 \|v^{(4)}\|_{L^\infty}$.

iii) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v - Pv\|_{H^2(]0,1[)} \leq Ch^2 \|v^{(4)}\|_{L^\infty(]0,1[)},$$

pour $h \leq 1$.

g) On note maintenant u la solution de l'équation $(*)$ et u_h la solution du système linéaire associé au problème discret.
Montrer qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que $\|u - u_h\|_{H^2} \leq C'h^2$ si $h \leq 1$.