Université de Rouen
Master 1, MFA 2010–2011
Analyse numérique des EDP

Formulation variationnelle des problèmes aux limites

---

1. (Projection sur un convexe fermé)
Soit H un espace de Hilbert et E un espace vectoriel fermé de H.

a) Soit $u \in H$. Montrer que la projection orthogonale de $P_E(u)$ est caractérisée par

$$\left\{ \begin{array}{c} P_E(u) \in E \\ (u - P_E(u), w)_H = 0, \ \forall w \in E \end{array} \right.$$

b) Montrer que l'application P_E est linéaire continue de H dans H.

2. (Lemme de Lax-Milgram)
Soit H un espace de Hilbert. On considère le problème variationnel abstrait : Trouver $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, a(u, v) = l(v),$$

où a est une forme bilinéaire, symétrique, continue et H-elliptique. La forme linéaire l est continue.

a) Montrer que la norme préhilbertienne $||v||_a = a(v, v)^{1/2}$ est équivalente à la norme de H.

b) Montrer que l'espace H est de Hilbert pour la norme $||.||_a$.

c) Montrer qu'il existe un unique $u_0 \in H$ tel que pour tout $v \in H$, $a(u_0, v) = l(v)$.

3.

On considère l'espace

$$V = \Big\{ v \in C^1([0, 1]), v(0) = v(1) = 0 \Big\}.$$

a) Monter que $||v||_1 = \left(\int_0^1 [v^2 + (v')^2] \, dx \right)^{1/2}$ est une norme préhilbertienne sur V

b) Montrer que la suite

$$u_n(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x & \text{si} & 0 \leq x < 1/2 - 1/n \\ -\dfrac{n}{2}(x - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{n-1}{2n} & \text{si} & 1/2 - 1/n \leq x < 1/2 + 1/n \\ 1 - x & \text{si} & 1/2 + 1/n \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

est de Cauchy dans V mais qu'elle n'est pas convergente dans V pour la norme $||v||_1$. Conclure.

4.

Soit $v \in L^2(]0, 1[)$.

a) Montrer que si v admet une dérivée faible, alors celle-ci est unique.

b) Si $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$, alors v admet une dérivée au sens faible et celle-ci coïncide avec sa dérivée au sens usuel.

5.

L'espace de Sobolev $H^1(]0,1[)$ est l'espace des fonctions $v \in L^2(]0,1[)$ qui admettent une dérivée faible.

a) Montrer que l'espace H^1, muni de la norme $||v||_1$ (de la question 3. a), est un espace de Hilbert

b) Montrer que les inclusions $\mathcal{C}^1([0,1]) \subset H^1(]0,1[) \subset L^2(]0,1[)$ sont strictes.

6.

Soient $c \in L^\infty(]0,1[)$, $c \geq 0$ et $f \in L^2(]0,1[)$.

a) Montrer que le problème variationnel : trouver $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \qquad \int_0^1 (u'v' + cuv)\, dx = \int_0^1 fv\, dx$$

admet une solution unique

b) Montrer qu'il existe une constante C indépendante de u telle que $||u||_1 \leq C||f||_{L^2}$

c) Si c et f sont continues sur $[0,1]$, montrer alors que u est la solution du problème aux limites associé.