Différences finies en dim 2

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$. On considère l'unique solution u du problème :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

On admettra le résultat suivant :

$$\forall m \geq 1, \quad f \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega}) \Longrightarrow u \in \mathcal{C}^{m+2}(\bar{\Omega}) \tag{2}$$

avec l'estimation

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{m+2}(\bar{\Omega})} \leq C(m)\|f\|_{\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})}, \quad \big(\|f\|_{\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha f(x)|\big)$$

i) En supposant que $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, démontrer le principe du maximum :

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad \min(0, \min_{x \in (\bar{\Omega})} f(x)) \leq u(x) \leq \max(0, \max_{x \in (\bar{\Omega})} f(x))$$

En déduire l'unicité de la solution.

ii) On suppose maintenant que Ω est un carré $]0,1[\times]0,1[$ auquel cas (2) reste vrai si on suppose f à support compact dans Ω. On considère un maillage uniforme de Ω de pas h, M_{ij} désigne le point de coordonnées (ih, jh), $0 \leq i, j \leq N$, $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$. On approche la solution de (1) par le schéma aux différences finies :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\dfrac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}}{h^2} + u_{ij} & = & f_{ij}, & \text{si } M_{ij} \in \Omega \\ u_{ij} & = & 0, & \text{si } M_{ij} \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3}$$

Ecrire le problème discret sous forme matricielle dont on précisera la matrice.

iii) Montrer que si u_{ij} est solution de (3), alors :

$$\min(0, \min_{ij} f_{ij}) \leq u_{ij} \leq \max(0, \max_{ij} f_{ij})$$

En déduire l'existence et l'unicité de la solution du schéma (3).

iv) On désigne par u_h la solution de (3) et posons :

$$\|u - u_h\|_\infty = \max_{i,j} \big|u(M_{ij}) - u_{ij}\big|.$$

Dans le cas où $f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, établir une estimation d'erreur pour $\|u - u_h\|_\infty$ en fonction de h et de $\|f\|_{\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})}$