Université de Rouen
Master 1, MFA 2010–2011
Analyse numérique des EDP

Différences finies en dim 1

1.

Notations. On considère un maillage de l'intervalle $[0,1]$ correspondant à une subdivision $0 = x_0 < \cdots < x_{n+1} = 1$. Etant donnée une fonction u définie sur l'intervalle $[0,1]$, on posera $u_i = u(x_i)$ et on notera u_h le vecteur dont la $i-$ème composante est u_i.
On note $\bar{u}_h = (\bar{u}_i)_i$ la solution du système linéaire de l'approximation par différences finies pour un maillage uniforme de pas h pour chacune des équations a), b), c), d), e) et f) ci-dessous. Pour chacune de ces équations :

i) Ecrire le système linéaire associé au problème discret.

ii) Résoudre le système pour $h = \frac{1}{2}$.

iii) Déterminer la solution explicite u. Calculer $|u(1/2) - \bar{u}_1|$ et $||u - \bar{u}_h||_\infty$.

Pour tous les calculs, on prendra les constantes a, b, c, α, β égales à 1.

a) *Condition de Dirichlet homogène.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } u(0) = u(1) = 0.$$

b) *Condition de Dirichlet non homogène.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } u(0) = a \text{ et } \ u(1) = b.$$

c) *Condition de Neumann homogène.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } u'(0) = u'(1) = 0.$$

d) *Condition de Neumann non homogène.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } u'(0) = a \text{ et } \ u'(1) = b.$$

e) *Condition de Robin homogène.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } \ -u'(0) + \alpha u(0) = 0 \text{ et } \ u'(1) + \beta u(1) = 0.$$

f) *Condition périodique.*

$$-u'' + cu = 1 \quad \text{dans }]0,1[\quad \text{avec } u(0) = u(1) \text{ et } \ u'(0) = u'(1).$$

2.

a) Résoudre l'équation différentielle (E) d'ordre 2

$$y'' = y' + 2y + \cos x$$

sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ avec $y(0) = -0.3$ et $y(\pi/2) = -0,1$.

b) Écrire la méthode des différences finies pour approcher la solution de (E).

c) On désigne par h le pas de discrétisation de la méthode. Comparer les solutions approchée et exacte dans les cas :
i) $h = \pi/4$,
ii) $h = \pi/6$.

3.

Soit b un nombre réel non nul. Considérons le problème aux limites :

$$\begin{cases} -u''(x) + bu'(x) = 0, & x \in]0,1[, \\ u(0) = 0 \text{ et } u'(1) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

a) Calculer explicitement la solution du problème (2).

b) Déterminer la solution approchée obtenue en utilisant la méthode des différences finies.

c) Pour $b = 8$ et pour un pas de discrétisation $n = 4$, comparer la solution exacte et la solution approchée en $1/8$ et en $1/4$.

4.

On veut résoudre le problème : Trouver $u \in \mathcal{C}^2(]0,1[) \cap \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + \dfrac{u'(x)}{1+x} = f(x), & x \in]0,1[, \\ \quad u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

a) Ecrire, en utilisant la méthode des différences finies, le problème approché sous forme $A_h u_h = b_h$ en précisant la matrice A_h et le second membre b_h.

b) Montrer que la matrice A_h est monotone.

c) On considère la fonction θ sur $[0,1]$ définie par

$$\theta(x) = -1/2(1+x)^2 \ln(1+x) + 2/3(x^2 + 2x) \ln 2$$

Montrer que θ est solution d'un problème aux limites de même type que (3).

d) On définit le vecteur θ_h de composantes $\theta(x_i)$. Montrer qu'il existe une constante C indépendante de h telle que

$$|(A_h \theta_h)_i - 1| \leq Ch^2, \quad 1 \leq i \leq N.$$

En déduire que

$$(A_h \theta_h)_i \geq 1 - Ch^2, \quad 1 \leq i \leq N.$$

e) Déduire de ce qui précède qu'il existe une constante M indépendante de h telle que

$$||A_h^{-1}||_\infty \leq M.$$

f) En précisant les hypothèses sur u solution de (3), montrer la convergence de u_h vers u.