Université de Rouen
Master 1, MFA 2010–2011
Analyse numérique des EDP

Méthodes itératives, Méthode de tir, Principe du maximum

1.

On considère la matrice de taille n définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ et on pose $h = \frac{1}{n+1}$.

a) i) Montrer que $\forall v \in \mathbb{R}^n$ on a

$$(Av, v) = v_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)^2 + v_n^2.$$

ii) En déduire que A est définie positive.

iii) Montrer que $\mathrm{sp}(A) \subset]0, 4[$.

b) i) Soit $\lambda \in]0, 4[$ fixé. Montrer que les suites vérifiant la relation de récurence

$$v_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad v_{k+2} = (2 - \lambda)v_{k+1} - v_k$$

sont de la forme $v_k = a \sin(k\theta)$ avec $\lambda = 2(1 - \cos\theta)$.

ii) En déduire que

$$\mathrm{sp}(A) = \{2(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}) \mid 1 \le k \le n\}.$$

c) i) Trouver le rayon spectral des matrices de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation optimale.

ii) En donner un développement asymtotique pour h petit.

iii) Combien d'itérations demandent les méthodes précédentes pour obtenir la solution de $Ax = b$ avec une erreur de l'ordre de 10^{-10}, lorsque les données initiales sont d'ordre 1.

iv) Combien d'opérations demande une méthode directe adaptée.

v) Quelle méthode doit-on préférer ?

2.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\rho(J(A)) < 1 < \rho(\mathcal{L}_1(A))$.

b) Montrer que $\rho(\mathcal{L}_1(B)) < 1 < \rho(J(B))$.

3. Matrices-bandes

On dit qu'une matrice A est une matrice-bande de largeur m si $a_{ij} = 0$ si $|i - j| \ge m$. On suppose que A est hermitienne définie positive.

a) i) Montrer que la matrice B de la décomposition de Cholesky de $A = BB^T$ est une matrice bande de largeur m.

ii) Combien d'opérations demande alors la résolution d'un système linéaire avec A ?

b) Soit B la matrice triangulaire inférieure définie par

$$b_{11} = 1, \qquad b_{ii} = i - 1 \quad \text{si } i \geq 2, \qquad b_{ij} = -1 \quad \text{si } i > j, \qquad b_{ij} = 0 \quad \text{si } i < j.$$

i) Calculer BB^T.

ii) Montrer que la matrice BB^T est définie positive.

iii) Quel est l'intérêt des méthodes itératives par rapport à la méthode de Cholesky pour la résolution de systèmes linéaires avec la matrice BB^T ?

4. Méthode de Tir

Soit f et c deux fonctions réelles données de $\mathcal{C}^0([0,1])$ avec $c \geq 0$ dans $[0,1]$. On s'intéresse au problème aux limites avec conditions de périodicité : Trouver $u \in \mathcal{C}^2(]0,1[) \cap \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1), u'(0) = u'(1). \end{cases} \tag{1}$$

a) On va résoudre ce problème par la méthode de tir.

i) Montrer que ce problème de Cauchy : Trouver $v_0 \in$u$\in \mathcal{C}^2(]0,1[) \cap \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que

$$\begin{cases} -v_0''(x) + c(x)v_0(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \\ v_0(0) = 0, v_0'(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

admet une solution unique.

ii) On note $v_0(1) = \alpha$ et $v_0'(1) = \beta$. Montrer que le problème (1) est équivalent à résoudre le problème (3) suivant : Trouver $w \in \mathcal{C}^2(]0,1[) \cap \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que

$$\begin{cases} -w''(x) + c(x)w(x) = 0, \qquad x \in]0,1[, \\ w(0) = w(1) + \alpha, w'(0) = w'(1) + \beta. \end{cases} \tag{3}$$

Quelle est la relation entre u et w qui assure l'équivalence des deux problèmes.

iii) Pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on note $w_{\lambda,\mu}$ la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} -w_{\lambda,\mu}''(x) + c(x)w_{\lambda,\mu}(x) = 0, \quad x \in]0,1[, \\ w_{\lambda,\mu}(0) = \lambda, w_{\lambda,\mu}'(0) = \mu, \end{cases} \tag{4}$$

Montrer que $w_{\lambda,\mu}$ existe et est unique.

iv) On pose $L(\lambda, \mu) = (w_{\lambda,\mu}(1) - \lambda, w_{\lambda,\mu}'(1) - \mu)$. Montrer que L est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que le problème (3) est équivalent à montrer que L est surjective.

v) On suppose qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $c(x_0) > 0$. Montrer que L est injective. En déduire l'existence et l'unicité de la solution du problème (1) dans ce cas.

vi) On traite maintenant le cas $c = 0$. Montrer que si le problème (1) a une solution, alors nécessairement,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

Donner dans ce cas toutes les solutions u du problème (1) explicitement en fonction de f.

b) Dans la suite du problème, on supposera que $c(0) = c(1)$ et $f(0) = f(1)$. Si g est une fonction sur $[0,1[$, on note $\tilde{g}$ son prolongement par périodicité de période 1 à $\mathbb{R}$ tout entier, c'est-à-dire $\tilde{g}(x) = g(x - E(x))$, $E(x)$ désignant la partie entière de x.

i) Montrer que pour toute solution u du problème (1), $\tilde{u}$ appartient à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Quelle équation satisfait $\tilde{u}$?

ii) Montrer que si de plus c et f appartiennent à $\mathcal{C}^2([0,1])$, avec $c'(0) = c'(1)$, $c''(0) = c''(1)$, $f'(0) = f'(1)$ et $f''(0) = f''(1)$, alors $\tilde{u} \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$.

5. **Principe du maximum**

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On considère trois fonctions bornées $a : \Omega \to M_n$, $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$, et $c : \Omega \to \mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que la matrice $a - \alpha I$ est symétrique positive $\forall x \in \Omega$. On considère alors l'opérateur différentiel linéaire

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i}^{n} b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$$

défini pour les fonctions $u \in C^2(\Omega)$; et on dit que L est strictement elliptique à cause de l'hypothèse faite sur a.

a) Montrer que le laplacien est un opérateur strictement elliptique.

b) Montrer que si a et a' sont deux matrices symétriques positives, on a $\mathrm{tr}(aa') \geq 0$. [Commencer par le cas où la matrice a est diagonale.]

c) Soit $u \in C^2(\Omega)$. Soit x un maximum local de u. En utilisant la formule de Taylor, montrer que $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = 0$ $\forall i$ et que la matrice hessienne $(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j})$ est négative.

d) Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant $Lu - cu > 0$ dans Ω. Montrer que u ne peut atteindre son maximum positif sur Ω qu'en un point de $\partial\Omega$ (c'est-à-dire que $u(x) = \max_{\overline{\Omega}} u^+ \Rightarrow x \in \partial\Omega$).

e) Trouver $k > 0$ tel que la fonction $w(x) = \exp(kx_1)$ vérifie $Lw - cw > 0$ sur Ω.

f) Etablir le principe du maximum suivant. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifie $Lu - cu \geq 0$ dans Ω, alors $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$. [Considérer, pour $\epsilon > 0$, la fonction $u + \epsilon w$ et faire tendre $\epsilon \to 0$.]

g) Etablir le principe de comparaison suivant. Si $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifient $Lu - cu \geq Lv - cv$ dans Ω et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq v$ sur $\overline{\Omega}$.

h) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. On considère le problème de Dirichlet (classique) : trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant

$$Lu - cu = f \quad \text{dans } \Omega \qquad \text{et} \qquad u = g \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Montrer que le problème de Dirichlet admet au plus une solution.