Université de Rouen
Master 1, MFA 2010–2011
Analyse des EDP

Problèmes variationnels

1 Problèmes variationnels en dimension 1

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$-u'' + cu = f \quad \text{p.p. dans }]0,1[$$

avec diverses conditions au bord. On supposera que $c \in L^\infty(]0,1[)$ et que $c \geq c_0$ p.p. pour une constante $c_0 \geq 0$. Sauf mention contraire, on supposera que $c_0 > 0$ et que $f \in L^2(]0,1[)$. On considère alors la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2 + cv^2 - \int_0^1 fv$ définie sur $H^1(]0,1[)$. Rappelant que les fonctions de $H^1(]0,1[)$ sont continues (à un représentant près), on définira sans ambiguïté leurs valeurs en tout point de $[0,1]$.

a) *Condition de Dirichlet homogène (avec $c_0 = 0$).*

i) Montrer que le problème $\min\{J(v) \mid v \in H_0^1(]0,1[)\}$ admet une unique solution u.

ii) Montrer que u vérifie

$$-u'' + cu = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,1[) \quad \text{avec } u(0) = u(1) = 0.$$

iii) Réciproquement montrer que si u est solution de l'équation précédente, alors elle est solution du problème de minimisation de la question (a–i).

iv) Montrer que $u \in H^2(]0,1[)$. Montrer que si c et f sont continues, alors u est de classe C^2. Montrer que si $c \in C^\infty([0,1])$ et si $f \in H^k(]0,1[)$ alors $u \in H^{k+2}(]0,1[)$.

v) Adapter l'étude précédente au cas $f \in H^{-1}(]0,1[)$.

b) *Condition de Dirichlet non homogène (avec $c_0 = 0$).* Soit a et b deux réels fixés. On veut résoudre

$$-u'' + cu = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,1[) \quad \text{avec } u(0) = a,\ u(1) = b. \qquad (*)$$

i) On pose $E = \{v \in H^1(]0,1[) \mid v(0) = a, v(1) = b\}$. Montrer que E est un sous-espace affine fermé de $H^1(]0,1[)$ d'espace vectoriel associé $H_0^1(]0,1[)$.

ii) Montrer que le problème $\min\{J(v) \mid v \in E\}$ admet une unique solution u. Montrer que u est l'unique solution de $(*)$.

iii) On donne une autre preuve du résultat précécent. Soit $u_0 \in E$ une fonction régulière fixée (par exemple $u_0(x) = a(1-x) + bx$). Montrer que u est solution de $(*)$ si et seulement si $v = u - u_0$ est solution de

$$-v'' + cv = f + u_0'' - cu_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,1[) \quad \text{avec } v(0) = v(1) = 0.$$

Déduire de la résolution du problème de Dirichlet homogène que $(*)$ admet une unique solution.

iv) Adapter l'étude précédente au cas $f \in H^{-1}(]0,1[)$.

c) *Condition de Neumann homogène.*

i) Montrer que le problème $\min\{J(v) \mid v \in H^1(]0,1[)\}$ admet une unique solution u.

ii) Montrer que l'on a $-u'' + cu = f$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$. En déduire que $u \in H^2(]0,1[)$. Notons que ceci implique que $u \in C^1([0,1])$.

iii) En utilisant la densité de $C^\infty([0,1])$ dans $H^2(]0,1[)$, montrer que $\int u''\phi + \int u'\phi' = u'(1)\phi(1) - u'(0)\phi(0)\ \forall \phi \in C^\infty([0,1])$. Déduire de la question précédente que $u'(0) = u'(1) = 0$.

iv) Conclure que le problème : trouver $v \in H^2(]0,1[)$ tel que

$$-v'' + cv = f \quad \text{p.p. dans }]0,1[\quad \text{avec } v'(0) = v'(1) = 0,$$

admet u pour unique solution.

d) *Condition de Neumann non homogène.* Soit a et b deux réels fixés.

i) Montrer que le problème $\min\{J(v) - av(0) - bv(1) \mid v \in H^1(]0,1[)\}$ admet une unique solution u.

ii) En suivant les étapes de la résolution du problème de Neumann homogène, montrer que $u \in H^2(]0,1[)$ et que c'est l'unique solution de

$$-u'' + cu = f \quad \text{p.p. dans }]0,1[\quad \text{avec } u'(0) = -a,\ u'(1) = b.$$

e) *Condition de Robin homogène.* Soit $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ fixés.

i) Montrer que le problème $\min\{J(v) + \frac{\alpha}{2}v^2(0) + \frac{\beta}{2}v^2(1) \mid v \in H^1(]0,1[)\}$ admet une unique solution u.

ii) En suivant les étapes de la résolution du problème de Neumann homogène, montrer que $u \in H^2(]0,1[)$ et que c'est l'unique solution de

$$-u'' + cu = f \quad \text{p.p. dans }]0,1[\quad \text{avec } -u'(0) + \alpha u(0) = 0,\ u'(1) + \beta u(1) = 0.$$

iii) Comment adapter l'étude précédente pour le problème de Robin non homogène ?

iv) On suppose que $\alpha > 0$ (ou que $\beta > 0$) mais on autorise $c_0 = 0$. Montrer que $\forall u \in H^1(]0,1[)$ on a l'inégalité $u^2(x) \leq 2u^2(0) + x^2 \int_0^x (u')^2\ \forall x \in [0,1]$. En déduire que la forme bilinéaire $\int u'v' + cuv + \alpha u(0)v(0) + \beta u(1)v(1)$ est elliptique dans $H^1(]0,1[)$. Conclure que l'équation précédente admet encore une unique solution.

f) *Conditions périodiques.* On pose $F = \{u \in H^1(]0,1[) \mid u(0) = u(1)\}$.

i) Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(]0,1[)$ et que $C^\infty([0,1]) \cap F$ est dense dans F. [On remarquera que si $u \in F$ on a $u - u(0) \in H_0^1(]0,1[)$.]

ii) En déduire que le problème $\min\{J(v) \mid v \in F\}$ admet une unique solution u.

iii) Montrer que $u \in H^2(]0,1[)$ et que c'est l'unique solution de

$$-u'' + cu = f \quad \text{p.p. dans }]0,1[\quad \text{avec } u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1).$$

2 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On considère des fonctions $a \in L^\infty(\Omega; M_n)$, $b, c \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ et $d \in L^\infty(\Omega)$ avec bien sûr $\|a\|_\infty = \max_{i,j} \|a_{i,j}\|_\infty$ et $\|b\|_\infty = \max_i \|b_i\|_\infty$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $\delta \geq 0$ tel que, pour presque tout x, on a $(a(x)\xi, \xi) \geq \alpha|\xi|^2\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ et $d(x) \geq \delta$. On pose $M = \sqrt{n}\max(\|b\|_\infty, \|c\|_\infty)$. On définit sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ la forme bilinéaire

$$A(u,v) = \int (a\nabla u, \nabla v) + (b, \nabla u)v + u(c, \nabla v) + duv.$$

Enfin, on fixe $f \in L^2(\Omega)$.

a) Montrer que $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ on a les inégalités

$$\left|\int (b, \nabla u)v\right| \leq M \int |\nabla u|\,|v| \qquad \text{et} \qquad \left|\int u(c, \nabla v)\right| \leq M \int |u|\,|\nabla v|.$$

b) En déduire que A est continu sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

c) En utilisant l'inegalité $st \leq \frac{rs^2}{2} + \frac{t^2}{2r}$ sur $\mathbb{R}$ avec $r > 0$, montrer que $\forall u \in H^1(\Omega)$ on a

$$A(u,u) \geq \frac{\alpha}{2} \int |\nabla u|^2 + (\delta - \frac{2M^2}{\alpha}) \int u^2.$$

d) A l'aide de l'inégalité de Poincaré, en déduire que A est elliptique dans $H_0^1(\Omega)$ dans l'un des cas suivants : ou $\delta \geq \frac{2M^2}{\alpha}$; ou M est petit; ou le diamètre de Ω est petit.

e) Sous l'une des conditions précédentes, montrer qu'il existe une unique fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$-\operatorname{div}(a \nabla u) + (b, \nabla u) - \operatorname{div}(cu) + du = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

f) Que peut-on dire si, presque partout, la matrice a est symétrique et $b = c$?

g) On suppose que $\delta > \frac{2M^2}{\alpha}$ et que Ω est régulier. Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ tel que $A(u,v) = \int fv \ \forall v \in H^1(\Omega)$. Quelles sont, formellement, l'équation et les conditions au bord satisfaites par u ?

3 Equation biharmonique

Soit Ω un ouvert borné et $f \in L^2(\Omega)$. On définit l'opérateur biharmonique par $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

L'ensemble des fonctions dont les dérivées d'ordre ≤ 2 sont dans $L^2(\Omega)$ se note $H^2(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert pour la norme $\|u\|_{H^2(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\leq 2} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$. On le munit aussi de la seminorme $\|u\|'_{H^2(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$. La fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$ est notée $H_0^2(\Omega)$.

a) En raisonnant par densité, montrer que $\int |\nabla u|^2 = -\int u \Delta u \ \forall u \in H_0^2(\Omega)$.

b) Déduire de l'inégalité de Poincaré que $\|\cdot\|'_{H^2(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^2(\Omega)$ équivalente à $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$.

c) Montrer que $\int (\Delta u)^2 = \|u\|'^2_{H^2(\Omega)} \ \forall u \in H_0^2(\Omega)$.

d) Vérifier que $\forall u \in H^2(\Omega)$ et $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\langle \Delta^2 u, \phi \rangle = \int (\Delta u)(\Delta \phi)$. [Ce dont on aura besoin dans la suite concerne $u \in H_0^2(\Omega)$. On commencera par démontrer le résultat dans ce cadre. Pour traiter le cas $u \in H^2(\Omega)$, on considérera $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ valant 1 au voisinage de $\operatorname{Supp} \phi$ et on observera que $\chi u \in H_0^2(\Omega)$.]

e) Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation $\Delta^2 u = f$ presque partout dans Ω. Quel est le problème de minimisation associé ?

Lorsque que Ω est régulier, la théorie des traces s'étend à $H^2(\Omega)$ et permet de donner un sens à u et $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur $\partial\Omega$ (qui coïncide avec la signification usuelle lorsque $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap H^2(\Omega)$). On peut montrer que $u \in H_0^2(\Omega)$ si et seulement si $u \in H^2(\Omega)$ et $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$. On conclut alors que l'équation

$$\Delta^2 u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \qquad \text{et} \qquad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

admet une unique solution dans $H^2(\Omega)$.

4 Formule de Green dans les espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert borné régulier (de classe C^1). En utilisant la densité de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, montrer que, pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i \, d\sigma,$$

où, dans le membre de droite, les fonctions intégrées sont les traces de u et v sur $\partial\Omega$.

5 Le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$

On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$, muni de la norme du dual.

a) Rappeler pourquoi $H^{-1}(\Omega)$ est un espace de Hilbert. [On sait déjà que c'est un espace de Banach. Il suffit donc de vérifier que sa norme dérive d'un produit scalaire. Si on note τ l'isomorphisme isométrique de Riesz de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, on vérifiera que la norme du dual est définie par la forme bilinéaire symétrique $(\tau^{-1}f, \tau^{-1}g)_{H^1(\Omega)}$.]

b) Montrer que $H^{-1}(\Omega)$ s'identifie canoniquement aux distributions pour lesquelles il existe une constante $C \geq 0$ telle que $|\langle T, \phi\rangle| \leq C\|\phi\|_{H^1(\Omega)}$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En d'autres termes, si on note E l'espace des distributions ci-dessus, montrer que l'application qui à $T \in H^{-1}(\Omega)$ associe sa restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$ est un isomorphisme.

c) i) Soit $f, f_i \in L^2(\Omega)$ pour $i = 1, \ldots, n$. En utilisant l'identification précédente, montrer que $f - \sum_i \partial_{x_i} f_i \in H^{-1}(\Omega)$ avec

$$\langle f - \sum_i \partial_{x_i} f_i, v\rangle = \int_\Omega fv + \sum \int f_i \partial_{x_i} v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Montrer que $\|f - \sum_i \partial_{x_i} f_i\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq (\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$.

ii) Si $u \in H^1(\Omega)$, en déduire que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ avec $\langle \Delta u, v\rangle = -\int(\nabla u, \nabla v)$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

d) i) Montrer que l'isomorphisme de Riesz de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ est l'application $Id - \Delta$.

ii) Etablir la réciproque de la question (c–i). Tout élément de $H^{-1}(\Omega)$ s'écrit $f - \sum_i \partial_{x_i} f_i$ avec f et $f_i \in L^2(\Omega)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Montrer que, de plus, on a $\|T\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$, l'infimum étant pris sur toutes les fonctions f et (f_i) pour lesquelles on a une telle décomposition. Cette décomposition est-elle unique ?