Université de Rouen
Master 1, MFA 2010–2011
Analyse des EDP

Dérivation au sens des distributions

---

1 Translation

Etant donné $a \in \mathbb{R}^n$, on définit pour toute fonction f sa translatée par $\tau_a f = f(\cdot - a)$ et pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ par $\tau_a T(\phi) = T(\tau_{-a}\phi)$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On fixe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Et on pose $\partial_a T = \sum a_i \partial_i T$.

a) Montrer que $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

b) Montrer que pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on a $\tau_a T_f = T_{\tau_a f}$.

c) Montrer que $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a $\lim_{h\to 0}(\tau_{ah}\phi - \phi)/h \to -\partial_a \phi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

d) Conclure que $\lim_{h\to 0}(\tau_{-ah}T - T)/h \to \partial_a T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2 Dérivées dans $\mathcal{D}'$ de fonctions régulières

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(\Omega)$. On veut montrer que $\frac{\partial T_f}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$.

a) Etablir le résultat si Ω est un ouvert borné régulier et si $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

b) On fixe $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Il est clair que le prolongement de ϕ par 0 à $\mathbb{R}^n$ est de classe C^∞ et a même support que ϕ. On le note encore ϕ. On admet l'existence d'une fonction $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\zeta = 1$ dans un voisinage de $\operatorname{Supp}\phi$. On pose $g = \zeta f$ sur Ω et $g = 0$ sur Ω^c.

   i) Montrer que $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

   ii) Montrer que $T_g(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}) = T_f(\frac{\partial \phi}{\partial x_i})$ et que $T_{\frac{\partial g}{\partial x_i}}(\phi) = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(\phi)$.

   iii) Soit B une boule ouverte telle que $\operatorname{Supp}\phi \subset B$. En appliquant le résultat de la question **(??)** à g et ϕ, conclure que $\frac{\partial T_f}{\partial x_i}(\phi) = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(\phi)$.

c) Comment s'étend le résultat précédent si $f \in C^k(\Omega)$?

3 Dérivées dans $\mathcal{D}'$ de fonctions régulières par morceaux dans $\mathbb{R}$

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f de classe C^1 par morceaux dans $]a, b[$. Il existe donc des points $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_k = b$ pour lesquels $f \in C^1(]x_{i-1}, x_i[)$ $\forall\, 1 \le i \le k$, et en lesquels f et f' admettent des limites à droite et à gauche $\forall\, 1 \le i \le k-1$ (que l'on note $f(x_i+)$, $f(x_i-)$, $\ldots$). On désigne par f' la dérivée usuelle de f (définie hors des x_i a priori et valant 0 en chaque x_i)

a) Soit $\phi \in \mathcal{D}(]a, b[)$. Montrer que $\forall\, 1 \le i \le k$ on a

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\phi' = [f(x_i-)\phi(x_i) - f(x_{i-1}+)\phi(x_{i-1})] - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'\phi$$

(avec $f(a+)\phi(a) = f(b-)\phi(b) = 0$).

b) En déduire que

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{i=1}^{k-1} [f(x_i+) - f(x_i-)]\delta_{x_i}.$$

4 Dterminer si les fonctions suivantes sont des distributions. Si tel est le cas, calculer leurs drives premire et seconde.

$$\max(|x|-1,0) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}, \qquad \sin|x| \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{x} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^*,$$

$$\frac{1}{x} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R} \ \text{(avec une valeur arbitraire en 0)}, \qquad \ln|x| \quad \text{dans}]-1,1[.$$

5 Montrer que les fonctions $|x|^k$ sont des distributions sur $\mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer leurs dérivées successives.