Université de Rouen
Master 1, MFA 2010–2011
Analyse des EDP

Espaces L^p, Convolution et régularisation

Dans cette fiche, on notera, pour $p \in [1,+\infty]$, L^p l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|.\|_p$ la norme associée. Sauf mention du contraire, tous les exposants p, q et r seront dans $[1,+\infty]$.

1 Inégalité de Hölder

On dit que deux exposants p et p' sont conjugués si $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. On souhaite montrer l'inégalité de Hölder : si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ alors $fg \in L^1(\Omega)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_{p'}$.

a) i) Etablir le résultat si $p=1$ ou $p=+\infty$.
   ii) On suppose dorénavant que $p \in]1,+\infty[$. En utilisant la concavité de la fonction ln, montrer l'inégalité de Young : si a et b sont deux nombres positifs on a $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'}$.
   iii) En déduire l'inégalité de Hölder dans le cas où $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$.
   iv) Traiter le cas général.

b) Que retrouve-t-on si $p=2$?

c) Montrer que l'inégalité de Hölder est optimale au sens où, si $p \in [1,+\infty[$, alors $\forall f \in L^p(\Omega)$ on peut trouver une fonction $g \in L^{p'}(\Omega)$ pour laquelle on a $\|fg\|_1 = \|f\|_p\|g\|_{p'}$. Que peut-on dire si $p=+\infty$?

d) Etablir l'inégalité de Hölder généralisée suivante. Si $f_1 \in L^{p_1}(\Omega), \ldots, f_k \in L^{p_k}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k}=1$, alors $f_1\ldots f_k \in L^1(\Omega)$ et $\|f_1\ldots f_k\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1}\ldots\|f_k\|_{p_k}$.

2 Inégalité de convolution

On veut montrer que, pour $p \in [1,+\infty]$, si $f \in L^1$ et $g \in L^p$ (ou le contraire), alors $f*g \in L^p$.

a) *Cas $p \in [1,+\infty[$, f et $g \geq 0$.* Soit f et g deux fonctions mesurables ≥ 0. La fonction $f*g$ est donc bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et est à valeurs dans $[0,+\infty]$.
   i) On note p' l'exposant conjugué de p.
   Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ on a $f*g(x)^p \leq [\int f(y)g(x-y)^p\,dy]^{\frac{1}{p}}[\int f(y)\,dy]^{\frac{p}{p'}}$.
   ii) En déduire que $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$.
   iii) Conclure que si, de plus, $f \in L^1$ et $g \in L^p$ on a $f*g \in L^p$ et que $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est dans L^1 pour presque tout x.

b) *Cas $p \in [1,+\infty[$, $f \in L^1$ et $g \in L^p$.* Les fonctions f et g sont maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On rappelle les notations $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$, de sorte que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.
   i) En appliquant la question **(??)** à f^+, f^-, g^+ et g^-, montrer, pour presque tout x, que la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est dans L^1 et que $f*g(x) = f^+*g^+(x) - f^-*g^+(x) - f^+*g^-(x) + f^-*g^-(x)$.
   ii) Après avoir justifié l'inégalité $|f*g| \leq |f|*|g|$, montrer que $f*g \in L^p$ et que $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$.

c) *Cas $p=\infty$, $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$.*
   i) Soit h une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\|h\|_\infty = \sup_\Omega |h|$.

ii) Montrer que pour tout x la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est dans L^1 et qu'elle est bornée par $\|f\|_1\|g\|_\infty$ de sorte que l'on a l'inégalité $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$.

iii) En utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans L^1, montrer que $f*g$ est continue.

iv) Si g est à support compact, montrer que $\lim_{|x|\to\infty} f*g(x) = 0$. A-t-on un résultat analogue si f est à support compact ?

3 a) Montrer qu'une suite régularisante ne peut pas converger dans L^1.

b) Montrer que L^1, muni de la convolution, est une algèbre de Banach (c'est-à-dire vérifie $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$), associative, commutative et sans élement unité (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction $e \in L^1$ pour laquelle $e*f = f \ \forall f \in L^1$).

4 Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

a) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $f*g$ est continue.

b) On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ est bornée ainsi que ses dérivées. Montrer que $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'on a $\partial_{x_i}(f*g) = \partial_{x_i} f * g$.

c) Conclure que si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $f*g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g$

5 Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{\text{loc}}$.

a) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ on a $\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g$. [On pourra commencer par le cas $g \in L^1$.]

b) On suppose de plus que la dérivée d'ordre α de g au sens des distributions est une fonction localement intégrable. On note $\partial^\alpha g$ cette fonction.
Montrer que l'on a $(\partial^\alpha f)*g = f*(\partial^\alpha g)$. [On fixera x et on considérera la fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\check{f}_x(t) = f(x-t)$.] On conclut donc que

$$\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g = f*(\partial^\alpha g).$$

6 On garde les notations de l'exercice précédent. L'objet de cet exercice est d'étendre les résultats précédents quand f et g sont seulement intégrables (ou même localement intégrables).

a) On suppose que $f \in L^1$, $g \in L^1$ et $\partial^\alpha g \in L^1$. Montrer que la dérivée au sens des distributions de la fonction intégrable $f*g$ est la fonction intégrable $f*(\partial^\alpha g)$. On note ceci $\partial^\alpha(f*g) = f*(\partial^\alpha g)$. [On considérera une suite $(f_k) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ convergeant vers f dans L^1 et on appliquera les résultats de l'exercice précédent à $f_k * g$.]

b) Etablir un résultat analogue si $g \in L^1_{\text{loc}}$, $\partial^\alpha g \in L^1_{\text{loc}}$ et si $f \in L^1$ est à support compact. On aura alors $\partial^\alpha(f*g) \in L^1_{\text{loc}}$. [On justifiera que $f*g$ est bien définie et est localement intégrable et on raisonnera comme dans la question précédente en observant que l'on peut supposer que les fonctions f_k sont à support dans un compact fixe.]

c) Même question pour $f \in L^1_{\text{loc}}$, $g \in L^1$ à support compact et $\partial^\alpha g \in L^1_{\text{loc}}$. [On justifiera que $\partial^\alpha g$ est à support compact et on raisonnera comme précédemment.]