Université de Rouen
Master 1, MFA 2010–2011
Analyse des EDP

Solutions classiques

---

1 a) Soit u et v deux fonctions réelles deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\Delta(uv) = u\,\Delta\, v + 2(\nabla\, u, \nabla\, v) + v\,\Delta\, u.$$

b) Soit trois fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ régulières. Montrer que

$$\Delta(u \circ v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(v)}{\partial x_i \partial x_j}(\nabla\, v_i, \nabla\, v_j) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(v)}{\partial x_i}\,\Delta\, v_i$$

et

$$\Delta(h \circ u) = h''(u)|\,\nabla\, u|^2 + h'(u)\,\Delta\, u.$$

2 a) Soit trois réels a, b et γ.

i) En fonction des valeurs de γ, déterminer les solutions éventuelles du problème de Dirichlet

$$-u'' + \gamma u = 0 \quad \text{sur }]0,1[\qquad \text{et} \qquad u(0) = a,\ u(1) = b.$$

Quand y a-t-il existence et unicité des solutions?

ii) Même question pour le problème de Neumann

$$-u'' + \gamma u = 0 \quad \text{sur }]0,1[\qquad \text{et} \qquad u'(0) = a,\ u'(1) = b.$$

b) On se donne maintenant $f \in C([0,1])$.

i) En utilisant les résultats classiques sur la résolution de systèmes linéaires à coefficients constants, déterminer la solution de l'équation différentielle

$$-u'' + \gamma u = f \quad \text{sur }]0,1[$$

en fonction de $u(0)$ et $u'(0)$ et d'une racine carrée (complexe) δ de γ.

ii) En déduire les solutions éventuelles du problème de Dirichlet

$$-u'' + \gamma u = f \quad \text{sur }]0,1[\qquad \text{et} \qquad u(0) = a,\ u(1) = b.$$

iii) Même question pour le problème de Neumann

$$-u'' + \gamma u = f \quad \text{sur }]0,1[\qquad \text{et} \qquad u'(0) = a,\ u'(1) = b.$$

3 **Fonctions radiales**

Une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite radiale si il existe $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $u(x) = v(|x|)\ \forall x$.

a) Montrer que si u est une fonction radiale alors, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\Delta\, u(x) = r^{1-n}(r^{n-1}v')'\big|_{r=|x|}.$$

b) Deux réels $0 < a < b$ étant fixés, on considère la couronne $\Omega = \{x \mid a < |x| < b\}$. Déterminer toutes les fonctions radiales harmoniques dans Ω.

c) Soit $f \in C(\overline{\Omega})$ une fonction radiale.

i) Résoudre le problème de Dirichlet : trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que

$$\Delta\, u = f \quad \text{dans } \Omega \qquad \text{et} \qquad u = \alpha \text{ si } |x| = a, \quad u = \beta \text{ si } |x| = b.$$

ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que le problème de Neumann

$$\Delta\, u = f \quad \text{dans } \Omega \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha \text{ si } |x| = a, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \beta \text{ si } |x| = b$$

admette au moins une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Déterminer alors toutes les solutions.

4 Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné régulier (de classe C^1). En admettant la formule

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i\, d\sigma,$$

montrer les identités suivantes pour des fonctions scalaires régulières (on précisera pour chacune la régularité nécessaire)

$$\int_\Omega \Delta\, u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\, d\sigma - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx,$$

$$\int_\Omega u\, \Delta\, v\, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma - \int_\Omega (\nabla\, u, \nabla\, v)\, dx \quad \text{(première identité de Green)},$$

$$\int_\Omega u\, \Delta\, v\, dx - \int_\Omega v\, \Delta\, u\, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma \quad \text{(deuxième identité de Green)}.$$

5 Formule de représentation de Green

On appelle solution fondamentale du laplacien la fonction radiale

$$E_1(x) = \frac{|x|}{2}, \quad E_2(x) = \frac{\log |x|}{2\pi}, \quad E_n(x) = \frac{-1}{(n-2)s_n|x|^{n-2}},$$

s_n étant la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que E_n est harmonique dans $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

b) Vérifier que E_n et $\nabla\, E_n$ sont localement intégrables.

c) Montrer que pour toute fonction continue u on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B(\epsilon)} uE_n\, d\sigma = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B(\epsilon)} u \frac{\partial E_n}{\partial \nu}\, d\sigma = u(0).$$

d) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Soit $x_0 \in \Omega$ fixé. En écrivant la deuxième identité de Green sur $\Omega \backslash \overline{B}(x_0, \epsilon)$ pour u et E_n, établir la formule de représentation de Green

$$u(x_0) = \int_\Omega \Delta\, u(x) E_n(x - x_0)\, dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial E_n}{\partial \nu}(x - x_0)\, d\sigma - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) E_n(x - x_0)\, d\sigma.$$

6 Formule de la moyenne

Dans cet exercice, $u \in C^2(\Omega)$ désigne une fonction harmonique.

a) En utilisant la formule de représentation de Green, montrer que u est analytique.

b) Montrer que, pour tout boule $B(x_0, R) \subset\subset \Omega$, on a les formules de la moyenne

$$u(x_0) = \frac{1}{s_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u \, d\sigma = \frac{n}{s_n R^n} \int_B u \, dx.$$

[Utiliser la formule de représentation de Green.]

c) On suppose maintenant Ω connexe.

i) Retrouver le principe du maximum fort : une fonction harmonique ne peut avoir un extremum intérieur à moins d'être constante.

ii) Montrer qu'une fonction analytique u constante sur un ouvert de Ω est en fait constante sur tout Ω. [On montrera d'abord que u est constante au voisinage de tout point.]

iii) En déduire qu'une fonction harmonique non constante ne peut avoir d'extremum local.