Normandie Université

Université de Rouen Normandie
Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
UMR CNRS 6085

Autour du théorème limite central pour les variables aléatoires dépendantes

Document de synthèse
présenté par

Mohamed EL MACHKOURI

en vue de l'obtention de
l'Habilitation à Diriger des Recherches
Spécialité : Mathématiques

Soutenue le 25 Octobre 2018 devant le jury composé de

Bernard BERCU	Professeur à l'université de Bordeaux *(Rapporteur)*
Pierre CALKA	Professeur à l'université de Rouen Normandie *(Examinateur)*
Jérôme DEDECKER	Professeur à l'université Paris Descartes *(Rapporteur)*
Sana LOUHICHI	Professeur à l'université de Grenoble *(Examinatrice)*
Charles SUQUET	Professeur à l'université de Lille *(Examinateur)*
Dalibor VOLNÝ	Professeur à l'université de Rouen Normandie *(Examinateur)*

Autre rapporteur non membre du jury

Siegfried HORMANN Professeur à l'université de technologie de Graz

Remerciements

Voici venu le temps d'exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Bernard Bercu, Jérôme Dedecker et Siegfried Hörmann qui m'ont fait l'honneur d'évaluer, en qualité de rapporteurs, l'ensemble de mes contributions scientifiques. Leurs travaux ont souvent été pour moi une source d'inspiration féconde. Qu'ils en soient remerciés très chaleureusement.

Je remercie très vivement Pierre Calka, Sana Louhichi et Charles Suquet pour avoir accepté de participer à mon jury. Je profite de cette occasion pour leur faire part de la profonde estime que j'ai pour eux et qui n'a d'égal que leurs qualités scientifiques et humaines exceptionnelles.

Merci infiniment à Dalibor Volný qui m'a initié à la recherche en mathématiques et qui a su m'épauler sur ce chemin parfois semé d'embuches. Je suis très sensible également au fait qu'il ait accepté de se porter garant pour mon habilitation à diriger des recherches. Cette marque de confiance me va droit au coeur. Je tiens à lui témoigner de nouveau mon amitié et mon profond respect.

Merci à Ahmed, Edwige, Marc et Sandrine pour leur gentillesse, leur éternelle bonne humeur et leur professionnalisme qui m'ont souvent épargné de pénibles tracasseries administratives.

Merci plus généralement à tous mes collègues qui font de notre laboratoire un lieu de travail et de vie très agréable. Parmis eux, certains ont été mes professeurs et des guides essentiels pour mes premiers pas d'étudiant dans l'enseignement supérieur. Je tiens à citer en particulier, Olivier Benois, Ahmed Bouziad, Mustapha Mourragui, Paul Raynaud de Fitte et notre regretté José De Sam Lazaro qui, les premiers, ont su sans aucun doute me transmettre leur passion pour les mathématiques.

Merci à Maman pour son amour et son grand labeur et merci à mes frères et soeurs pour tous les bons moments passés en famille. Merci à Papa, notre grand patriarche qui a su nous inculquer les valeurs de liberté, de respect, de solidarité et de travail si essentielles à ses yeux. Il nous a quitté beaucoup trop tôt. Je lui dédie ce travail.

Merci enfin à Yamna qui partage ma vie depuis maintenant neuf années et sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. Avec Inès, Yassine et Zakaria, elle continue à me combler de bonheur. Tous les quatre, vous me serez toujours indispensable.

Le hasard, c'est Dieu qui se promène incognito (Albert Einstein)

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire de synthèse, je présente l'ensemble de mes travaux de recherche réalisés pendant et après ma thèse de Doctorat soutenue le 12 décembre 2002 à l'Université de Rouen. Mes travaux sont centrés sur les théorèmes limite en théorie des probabilités et en statistique. Je m'intéresse plus précisemment au comportement asymptotique de champs et de suites stationnaires de variables aléatoires réelles dépendantes et à leurs applications en statistique non paramétrique. Un champ aléatoire réel est une famille $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelle indexées par le réseau $\mathbb{Z}^d$ où d est entier supérieur ou égal 1 et définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Lorsque $d = 1$, on dit simplement que $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires réelles ou encore une série temporelle. Parfois, nous ferons référence aux cas $d = 1$ et $d \geqslant 2$ par les dénominations « cas temporel » et « cas spatial » respectivement. Nous dirons qu'un champ aléatoire $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est stationnaire si les vecteurs aléatoires $(X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_n})$ et $(X_{i_1+k}, X_{i_2+k}, ..., X_{i_n+k})$ ont la même loi pour tout entier $n \geq 1$ et tous éléments $i_1, i_2, ..., i_n$ et k de $\mathbb{Z}^d$. Quitte à considérer un autre espace probabilisé, on peut supposer sans perte de généralité que le champ aléatoire stationnaire $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est défini pour tout i dans $\mathbb{Z}^d$ par $X_i = f\circ T^i$ où f est une variable aléatoire définie sur Ω et T est une action de $\mathbb{Z}^d$ qui préserve la mesure $\mathbb{P}$ (i.e. une famille $(T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de transformations mesurables définies de Ω dans Ω qui préservent la mesure $\mathbb{P}$ et qui vérifient $T^k\circ T^\ell = T^{k+\ell}$). Par exemple, si on considère l'espace probabilisé $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}^d}, \mu)$ où μ est la loi de $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$, si f est la projection de coordonnée 0 définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si T est la famille $(T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ des translations de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ définies pour tout ω dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ et tous k et ℓ dans $\mathbb{Z}^d$ par $(T^k\omega)_\ell = \omega_{\ell+k}$ alors le champ aléatoire stationnaire $(f\circ T^i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ a la même loi μ que $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$. Le Théorème Limite Central (TLC) pour les variables aléatoires indépendantes est l'un des résultats les plus important en théorie des probabilités et s'énonce de la manière suivante : si $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (iid) et si f est de moyenne nulle et de variance 1 alors la suite $(n^{-1/2}\sum_{i=0}^{n-1} f\circ T^i)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une gaussienne centrée-réduite. Lyapunov [**113**] fut le premier à donner une démonstration rigoureuse de ce résultat. En 1922, Lindeberg [**108**] a étendu le TLC de Lyapunov [**113**] à des suites de variables aléatoires indépendantes et non nécessairement identiquement distribuées. En adaptant la méthode de Lindeberg, Ibragimov [**92**] a démontré indépendamment de Billingsley [**11**] que le TLC est également valide pour les suites stationnaires ergodiques d'accroissements d'une martingale de carrés intégrables (i.e. des suites stationnaires de variables aléatoires dont les sommes partielles forment une martingale). Ce résultat est connu sous le nom de TLC de Billingsley-Ibragimov. Une façon d'étendre le TLC de Billingsley-Ibragimov a une suite stationnaire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ plus générale est d'approcher cette suite en un certain sens par une suite stationnaire d'accroissements d'une martingale. En effet, si $\mathcal{M}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{M} \subset T^{-1}\mathcal{M}$ et si

$$\mathbb{E}\left[f \,\middle|\, \bigvee_{i\in\mathbb{Z}} T^{-i}\mathcal{M}\right] = f \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[f \,\middle|\, \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} T^{-i}\mathcal{M}\right] = 0 \quad \text{p.s.}$$

alors une condition nécessaire et suffisante (voir Volný [**149**]) pour que f satisfasse la décomposition suivante

$$f = m + g - g\circ T \tag{1}$$

où m et g sont deux fonctions de carré intégrable telles que les variables aléatoires $(m\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une suite stationnaire d'accroissements d'une martingale relativement à la filtration $(T^{-k}\mathcal{M})_{k\in\mathbb{Z}}$ est que les suites de termes généraux

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[f\circ T^k | \mathcal{M}\right] \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^{-k} - \mathbb{E}\left[f\circ T^{-k} | \mathcal{M}\right] \quad \text{convergent dans } \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}). \tag{2}$$

Les fonctions $g - g\circ T$ et g sont appelées respectivement *fonction cobord* et *fonction de transfert* et la décomposition (1) est connue sous le nom de *décomposition martingale-cobord*. L'intérêt d'une telle décomposition réside dans le fait que l'on peut profiter de théorèmes limite pour la suite d'accroissements d'une martingale $(m\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ pour les étendre au processus stationnaire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Cette technique a été utilisée pour la première fois par Gordin [**74**] (voir également Hall et Heyde [**83**]) pour démontrer un TLC sous une condition de nature projective (i.e. une condition qui fait intervenir une série d'espérances conditionnelles). Cependant, on s'aperçoit qu'il n'est pas nécessaire que la fonction de transfert g soit de carré intégrable pour obtenir le TLC à partir de la décomposition (1) et du résultat analogue pour les martingales (TLC de Billingsley-Ibragimov). En effet, la décomposition (1) fournit pour tout entier $n \geq 1$,

$$n^{-1/2}\sum_{i=0}^{n-1} f\circ T^i = n^{-1/2}\sum_{i=0}^{n-1} m\circ T^i + n^{-1/2}(g - g\circ T^n)$$

et il suffit que g soit mesurable pour que le terme $n^{-1/2}(g - g\circ T^n)$ converge en probabilité vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent, la condition (2) n'est pas nécessaire pour obtenir le TLC et on peut l'améliorer de la façon suivante (cf. Gordin [**75**] et Volný [**149**]) : la décomposition (1) a lieu avec m dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ et g dans $\mathbb{L}^1(\Omega, T\mathcal{M}, \mathbb{P})$ si et seulement si les suites de termes généraux

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[f\circ T^k \,|\, \mathcal{M}\right] \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^{-k} - \mathbb{E}\left[f\circ T^{-k} \,|\, \mathcal{M}\right] \quad \text{convergent dans } \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1/2}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=0}^{n-1} f\circ T^i\right|\right] < \infty.$$

L'extension de ces techniques d'approximations par des martingales pour obtenir des théorèmes limite pour un champ stationnaire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles pour $d \geqslant 2$ est restée longtemps une question ouverte. Un premier obstacle provient du fait que pour des variables aléatoires indexées par le réseau $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$, la notion de martingale doit être précisée. En effet, contrairement, au cas des suites stationnaires indexées par $\mathbb{Z}$, les notions de *passé* et de *futur* dépendent de la relation d'ordre choisie sur le réseau $\mathbb{Z}^d$. Récemment, il a été mis en évidence que le bon cadre pour mettre en oeuvre ces techniques d'approximation pour les champs aléatoires est l'utilisation de la notion d'*orthomartingale* introduite par Cairoli [**23**]. Mon article [**60**] en collaboration avec D. Giraudo est une contribution sur le sujet où nous établissons une condition projective suffisante pour une décomposition *orthomartingale-cobord* pour un champ aléatoire stationnaire (voir chapitre 2). Ce type d'approximation par des champs de type orthomartingale prend tout son sens depuis que se développe très récemment de nouveaux théorèmes limites pour les orthomartingales (voir Cuny, Dedecker et Volný [**36**] et Volný [**150, 152**]).

Une question très importante d'un point de vue théorique mais aussi pour les applications en statistique est l'évaluation de la vitesse de convergence dans le TLC pour les suites stationnaires de variables aléatoires réelles. Au début des années 40, Berry [**9**] et Esseen [**67**] ont montré que la vitesse de convergence dans le TLC pour les variables aléatoires iid est de l'ordre de $n^{-1/2}$ pourvu que celles-ci aient un moment d'ordre 3 fini. Plus précisemment, si $X_1, ..., X_n$ sont iid, de moyenne nulle, de variance $\sigma^2 > 0$ et telles que $\mathbb{E}\left[|X_0|^3\right] < \infty$ alors il existe une constante universelle $\kappa > 0$ telle que

$$\Delta_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i \leqslant x\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt \right| \leqslant \frac{\kappa\mathbb{E}\left[|X_0|^3\right]}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

La vitesse $n^{-1/2}$ obtenue dans ce résultat est optimale en ce sens qu'elle est atteinte lorsque $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires de Bernoulli. Dès lors, une question naturelle est détendre le TLC de Berry-Esseen aux accroissements d'une martingale en donnant une vitesse dans le TLC de Billingsley-Ibragimov. En 1982, sous des hypothèses sur les variances conditionnelles, Bolthausen [**14**] a obtenu une vitesse en $n^{-1/2}(\log n)$ pour des accroissements d'une martingale. En particulier, si $X_1, ..., X_n$ sont des accroissements *bornés* d'une martingale relativement à une filtration croissante $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ tels que $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i^2 \,|\, \mathcal{F}_{i-1}\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i^2\right] := v_n^2$ p.s. alors il existe une constante universelle $\kappa > 0$ telle que

$$\Delta_n \leqslant \frac{\kappa n \log n}{v_n^3}.$$

De plus, l'auteur démontre que la vitesse obtenue ne peut pas être améliorée sans renforcer les hypothèses de son théorème. D'ailleurs, il met en évidence que pour atteindre la vitesse $n^{-1/2}$ pour les martingales, une condition suffisante est de supposer que les moments conditionnels d'ordre 4 sont p.s. finis et que les moments conditionnels d'ordre 3 soient asymptotiquement constants. On voit ainsi qu'il est beaucoup plus difficile d'atteindre une vitesse en $n^{-1/2}$ dans le TLC pour des variables aléatoires dépendantes. En collaboration avec D. Volný, nous avons établi dans [**65**] que la vitesse de convergence dans le TLC de Billingsely-Ibragimov peut être arbitrairment lente si aucune condition sur les variances conditionnelles de la suite n'est imposée. En collaboration avec L. Ouchti, dans mon article [**62**], nous avons montré qu'il est possible d'élargir la classe des suites d'accroissements d'une martingale pour laquelle le TLC a lieu avec la vitesse $v_n^{-1}(\log n)$. Plus précisemment, nous avons démontré que le résultat de Bolthausen reste vrai sous une condition sur les moments conditionnels d'ordre 3 et qu'il n'est pas nécessaire que les variables aléatoires soient bornées (voir chapitre 1). Enfin, dans l'article [**54**], j'ai obtenu une vitesse de convergence en $n^{-1/2}$ dans le TLC pour une classe de processus linéaires avec des innovations indépendantes, bornées et à valeurs dans un espace de Hilbert. Cette question avait été étudiée par D. Bosq dans son article [**16**] mais sa preuve comportait une erreur (voir [**17**]).

Au lieu de s'intéresser à la convergence des fonctions de répartition d'une suite stationnaire vers la fonction de répartition d'une gaussienne (TLC), on peut s'interroger sur la convergence des densités de probabilités lorsque celles-ci existent. On parle alors du Théorème Limite Local (TLL). En 1954, Gnedenko [**73**] a démontré le résultat suivant : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variable aléatoire iid, centrée et de variance 1 et si f_n et φ sont les densités de probabilité respectives de $n^{-1/2}\sum_{i=1}^n X_i$ et de la loi normale centrée-réduite alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-\varphi(x)|$ converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini est qu'il existe un entier n_0 tel que f_{n_0} soit bornée. Un résultat similaire, dû également à Gnedenko [**72**], concerne les variables aléatoires à valeurs dans un réseau du type $S(b,h) := \{b+Nh\,/\,N\in\mathbb{Z}\}$ où $b\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}_+$. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires iid dont la loi est non dégénérée et concentrée sur $S(b,h)$. On dit que le pas h du réseau $S(b,h)$ est maximal si h est la plus grande valeur satisfaisant cette propriété. Supposons que la variance σ^2 de X_0 soit finie, notons m sa moyenne et notons également pour tout N dans $\mathbb{Z}$,

$$P_n(N) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = nb + Nh\right).$$

Gnedenko [**72**] a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\sup_{N\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}P_n(N) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{nb+Nh-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

est que le pas h du réseau soit maximal. En collaboration avec D. Volný, dans mon article [**65**], nous avons établi des contre-exemples qui mettent en évidence que les hypothèses des deux TLL de Gnedenko ne sont plus suffisantes pour obtenir un résultat similaire pour les accroissements d'une martingale. Ainsi, à ma connaissance, la question de la validité du TLL pour les martingales reste ouverte.

En 2002, T. de la Rue [**39**] a obtenu un résultat sur la vitesse de dispersion pour une classe de martingales qui ne satisfait pas nécessairement le TLC : si $X_1,\dots,X_n$ sont des accroissements bornés d'une martingale relativement à une filtration croissante $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et s'il existe une constante strictement positive β telle que $\mathbb{E}\left[X_k^2\,|\,\mathcal{F}_{k-1}\right]\geqslant\beta$ pour tout $1\leqslant k\leqslant n$ alors il existe deux constantes strictement positives κ et λ (ne dépendant pas de n) telles que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\in[t-1,t+1]\right)\leqslant\kappa n^{-\lambda}.$$

Une conséquence de mes travaux publiés dans [**65**] est que la condition sur les variances conditionnelles dans le résultat de T. de la Rue [**39**] est nécessaire. Si cette condition n'est pas satisfaite alors nous démontrons que la vitesse de dispersion peut être arbitrairement lente.

Enfin, je clos le chapitre 1 de ce mémoire par une présentation de mes articles [**51**] en collaboration avec E. H. El Abdaloui et A. Nogueira et [**59**] en collaboration avec K. Essebaiy et Y. Ouknine qui sont consacrés respectivement à une caractérisation du mélange faible dans un système dynamique ergodique en relation avec une conjecture de Kachurovskii [**96**] et au problème de l'estimation paramétrique du drift pour le processus de Ornstein-Uhlenbeck dirigé par un processus gaussien.

Une autre partie de mes travaux de recherche concerne la validité du TLC fonctionnel pour un champ aléatoire stationnaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$. Pour les champs de variables aléatoires iid, la preuve classique du TLC pour les suites de variables aléatoires réelles iid s'adapte naturellement puisque la géométrie du réseau $\mathbb{Z}^d$ ne joue aucun rôle du fait de l'indépendance. En 1998, Dedecker [**41**] a introduit une condition projective (condition (3) ci-dessous) suffisante pour la validité du TLC pour les champs stationnaires de carré intégrable. En effet, considérons la relation d'ordre lexicographique $<_{\text{lex}}$ sur $\mathbb{Z}^d$ et notons

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_j\,;\, j <_{\text{lex}} 0 \text{ et } |j| \geqslant n\right) \quad \text{où} \quad |j| = \max_{1\leq s\leq d} |j_s|$$

pour tout entier $n \geqslant 1$. Pour toute partie finie Γ de $\mathbb{Z}^d$, on note $|\Gamma|$ le nombre d'éléments de Γ et $\partial\Gamma = \{i \in \Gamma\ ;\ \exists j \in \mathbb{Z}^d \cap \Gamma^c\ \ |i-j| = 1\}$. Soit $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^d$ telle que $|\Gamma_n| \longrightarrow \infty$ et $|\partial\Gamma_n|/|\Gamma_n| \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Si X_0 est de moyenne nulle et de variance finie tel que

$$\sum_{k<_{\text{lex}}0} \left\| X_k\, \mathbb{E}\left[X_0 \,|\, \mathcal{F}_{|k|}\right]\right\|_1 < \infty \tag{3}$$

alors la suite $(|\Gamma_n|^{-1/2}\sum_{i\in\Gamma_n} X_i)_{n\geq 1}$ converge en loi vers un mélange de lois gaussiennes.

Rappellons que, par définition, une condition telle que (3) faisant intervenir une série de termes contenant des espérances conditionnelles est un critère projectif. La démonstration du TLC de Dedecker repose sur une extension de la méthode initiée par Lindeberg [**108**] pour les suites de variables aléatoires indépendantes. On peut remarquer que la condition (3) est satisfaite si le champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est indépendant ou de type accroissement d'une martingale au sens de l'ordre lexicographique, c'est à dire si $\mathbb{E}\left[X_k \,|\, \sigma\left(X_j\,;\, j <_{\text{lex}} k\right)\right] = 0$ p.s. pour tout k dans $\mathbb{Z}^d$. D'autre part, la condition projective (3) fournit de nouveaux critères pour les champs aléatoires mélangeants. Rappelons que pour mesurer le taux de mélange (ou taux de dépendance) entre deux tribus $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, il existe dans la littérature différents type de cœfficients. Nous nous intéressons ici au cœfficient de mélange fort (ou α-mélange) et au cœfficient de ϕ-mélange introduits respectivement par Rosenblatt [**136**] et Ibragimov [**91**] et définis par

$$\alpha\,(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \sup\left\{|\mathbb{P}(U)\,\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(U\cap V)|\ ;\ U\in\mathcal{U},\ V\in\mathcal{V}\right\},$$
$$\phi\,(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \sup\left\{|\mathbb{P}\,(V\,|\,U) - \mathbb{P}\,(V)|\ ;\ U\in\mathcal{U},\ \mathbb{P}\,(U) > 0,\ V\in\mathcal{V}\right\}.$$

On rappelle que $2\alpha(\mathcal{U},\mathcal{V}) \leq \phi(\mathcal{U},\mathcal{V})$. À tout champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$, on associe alors les cœfficients de mélange définis pour tout entier $n\geq 1$ et tout couple (k,ℓ) dans $(\mathbb{N}^*\cup\{\infty\})^2$ par

$$\alpha_{k,\ell}(n) = \sup\left\{\alpha\left(\mathcal{F}_{\Gamma_1}, \mathcal{F}_{\Gamma_2}\right)\ ;\ |\Gamma_1|\leq k,\ |\Gamma_2|\leq \ell,\ \Xi(\Gamma_1,\Gamma_2)\geq n\right\},$$
$$\phi_{k,\ell}(n) = \sup\left\{\phi\left(\mathcal{F}_{\Gamma_1}, \mathcal{F}_{\Gamma_2}\right)\ ;\ |\Gamma_1|\leq k,\ |\Gamma_2|\leq \ell,\ \Xi(\Gamma_1,\Gamma_2)\geq n\right\}$$

où pour toute partie Γ de $\mathbb{Z}^d$, la tribu $\mathcal{F}_\Gamma$ est engendrée par les variables aléatoires $\{X_i\,;\, i\in\Gamma\}$ et pour toutes parties Γ_1 et Γ_2 de $\mathbb{Z}^d$, on pose $\Xi(\Gamma_1,\Gamma_2)=\min\{|i-j|\,;\, i\in\Gamma_1, j\in\Gamma_2\}$. S'il existe un couple (k,ℓ) dans $(\mathbb{N}^*\cup\{\infty\})^2$ tel que les cœfficients $\alpha_{k,\ell}(n)$ (resp. $\phi_{k,\ell}(n)$) tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini, on dit que le champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est α-mélangeant (resp. ϕ-mélangeant). En utilisant une inégalité de covariance due à Rio [**134**], on peut majorer les termes de la série qui apparaîssent dans (3) à l'aide des cœfficients $\alpha_{1,\infty}$ et de la fonction quantile Q_{X_0} (i.e. l'inverse cadlag de la fonction $t\mapsto\mathbb{P}(|X_0|>t)$). Le critère projectif (3) est alors vérifié dès que

$$\sum_{n>0} n^{d-1}\int_0^{\alpha_{1,\infty}(n)} Q_{X_0}^2(u)\,du<+\infty. \tag{4}$$

D'autre part, en utilisant des inégalités de mélange dues à Serfling [**141**], on peut également majorer les termes de la série (3) à l'aide des cœfficients $\phi_{\infty,1}$. Le TLC de Dedecker reste alors valide si l'on remplace la condition (3) par la suivante

$$\sum_{n>0} n^{d-1}\phi_{\infty,1}(n)<+\infty. \tag{5}$$

On dit du TLC qu'il est fonctionnel ou encore qu'il s'agit d'un principe d'invariance s'il a lieu dans un espace fonctionnel. En l'occurrence, nous allons nous intéresser à des versions fonctionnelles du TLC de Dedecker [**41**] pour lesquelles j'ai apporté quelques contributions dans les articles [**52**] et [**64**]. Au préalable, nous allons considérer le cas des suites stationnaires afin de rappeler quelques résultats fondamentaux. Considérons une suite stationnaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Pour tout entier $n\geq 1$ et tout réel t de $[0,1]$, on note

$$S_n(t)=\sum_{i=0}^{[nt]-1} X_i+(nt-[nt])X_{[nt]} \tag{6}$$

où $[\,.\,]$ désigne la fonction partie entière. On dit que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfait un Théorème Limite Central Fonctionnel (TLCF) ou Principe d'invariance (PI) si la suite de processus de sommes partielles $\{n^{-1/2}S_n(t)\,;\, t\in[0,1]\}_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers un mouvement brownien dans l'espace $\mathcal{C}([0,1])$ des fonctions réelles continues définies sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme. En remarquant que la fonction réelle définie sur l'espace $\mathcal{C}([0,1])$ qui à une fonction g associe le réel $g(1)$ est continue par rapport à la norme uniforme, le TLC devient un cas particulier du TLCF. Le premier PI a été établi par Donsker [**46**] pour des suites de variables aléatoires iid Pour les suites stationnaires d'accroissements d'une martingale, le résultat est du à Billingsley [**11**]. En 1975, Heyde [**88**] a démontré que si X_0 est une variable aléatoire centrée de carré intégrable et si le processus stationnaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfait une certaine condition projective alors le principe d'invariance a lieu. En effet, la condition projective de Heyde [**88**] est équivalente (cf. Volný [**149**]) à la condition (2) et par conséquent le PI de Heyde [**88**] s'obtient via la décomposition martingale-cobord de X_0 à partir du résultat analogue de Billingsley [**11**] pour les suites d'accroissements d'une martingale. Le principe d'invariance peut également être formulé pour un champ aléatoire stationnaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ en étendant la définition (6) de la façon suivante : pour tout entier $n\geq 1$ et tout $i=(i_1,...,i_d)$ dans $\mathbb{Z}^d$, notons $R_{i/n}$ le cube défini par l'égalité

$$R_{i/n} = \left]\frac{i_1 - 1}{n}, \frac{i_1}{n}\right] \times \dots \times \left]\frac{i_d - 1}{n}, \frac{i_d}{n}\right].$$

Soit $\lambda_{i/n}$ la mesure de probabilité ayant pour densité $n^d \, \mathbb{1}_{R_{i/n}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$ et considérons la mesure aléatoire définie pour tout borélien A de $[0,1]^d$ par

$$\nu_n(A) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \lambda_{i/n}(A) X_i. \tag{7}$$

Considérons la classe Q_d des pavés de $[0,1]^d$ de la forme $[0,t] = [0,t_1] \times \dots \times [0,t_d]$ pour tout $t = (t_1, \dots, t_d)$ dans $[0,1]^d$. On voit que le processus $\{S_n(t)\,;\ t \in [0,1]\}_{n\geqslant 1}$ défini par (6) n'est rien d'autre que le processus $\{\nu_n(A)\,;\ A \in \mathrm{Q}_1\}_{n\geqslant 1}$ indexé par la classe Q_1 des intervalles d'origine 0 de $[0,1]$. Dans le cas temporel, les intervalles sont à la fois les connexes, les convexes et les boules euclidiennes et par conséquent la classe Q_1 est la principale classe d'intérêt pour les processus indexés par des ensembles. En revanche, dans le cas spatial, la collection des pavés n'est qu'une classe parmi d'autres. C'est pourquoi, il est intéressant d'étudier la validité du PI pour des classes $\mathcal{A}$ de boréliens aussi larges que possibles. En effet, si $\mathcal{A}$ est une classe de boréliens de $[0,1]^d$, on munit $\mathcal{A}$ d'une structure d'espace pseudo-métrique en posant $\rho(A,B) = \sqrt{\lambda(A\Delta B)}$ pour tous A et B dans $\mathcal{A}$. On appelle entropie métrique de la classe $\mathcal{A}$ et on note $H(\mathcal{A},\rho,\varepsilon)$ le logarithme du plus petit nombre de boules de rayon ε (relativement à la pseudo-métrique ρ) nécessaires pour recouvrir $\mathcal{A}$. Notons $C(\mathcal{A})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $\mathcal{A}$ muni de la norme $\|\,.\,\|_{\mathcal{A}}$ définie pour toute fonction f dans $C(\mathcal{A})$ par $\|f\|_{\mathcal{A}} = \sup_{A\in\mathcal{A}} |f(A)|$. On dit que W est un mouvement brownien standard indexé par $\mathcal{A}$ si W est un processus gaussien dont les trajectoires appartiennent à $C(\mathcal{A})$ et qui satisfait l'égalité $\mathrm{Cov}\,(W(A), W(B)) = \lambda(A\cap B)$. D'après Dudley [**49**], nous savons qu'un tel processus existe dès que

$$\int_0^1 \sqrt{H(\mathcal{A},\rho,\varepsilon)}\, d\varepsilon < \infty. \tag{H}$$

La condition (H) est satisfaite par une famille importante de classes d'ensembles appelées classes de Vapnik-Chervonenkis dont la classe Q_d des pavés et les boules euclidiennes de $[0,1]^d$ font partie. La condition (H) de Dudley est également satisfaite par des classes plus « grosses » comme les convexes de $[0,1]^2$ ou la classe des ensembles à bords α-différentiables avec $\alpha > d-1$ (cf. Dudley [**50**]). Nous dirons qu'un champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ satisfait un TLCF (ou un PI) si la suite $\{n^{-d/2}\nu_n(A)\,;\ A \in \mathcal{A}\}_{n\geqslant 1}$ converge en loi dans l'espace $C(\mathcal{A})$ vers un mélange de mouvements browniens indexés par la classe $\mathcal{A}$ (autrement dit, le processus limite est de la forme $\eta\, W$ où W est un mouvement brownien indexé par $\mathcal{A}$ et η est une variable aléatoire positive indépendante de W). Les premiers résultats de ce type ont été obtenus par Wichura [**157**] lorsque la classe $\mathcal{A}$ coïncide avec la classe Q_d des pavés de $[0,1]^d$ et pour des champs de variables aléatoires réelles iid de carrés intégrables améliorant ainsi celui de Kuelbs [**103**] dans lequel des conditions plus restrictives sont requises au niveau des moments. Ces résultats se réduisent en dimension $d = 1$ au PI de Donsker [**46**]. Basu et Dorea [**5**] ont montré que le PI a encore lieu lorsque le processus de sommes partielles défini par (7) est indexé par la classe Q_d des pavés de $[0,1]^d$ et issu d'un champ aléatoire réel stationnaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de type accroissement d'une martingale en un sens renforcé. En 2001, Dedecker [**42**] a prouvé, sous la condition (3) un TLCF lorsque le processus de sommes partielles est issu d'un champ stationnaire de variables aléatoires *bornées* et indexé par une classe $\mathcal{A}$ de boréliens vérifiant la condition (H) de Dudley. Mes articles [**52**], [**60**], [**61**], [**64**] et [**66**] sont des contributions au problème de la validité du TLCF pour les champs de variables aléatoires dépendantes. Ces résultats sont exposés dans le chapitre 3 de ce mémoire.

La dernière partie de mes travaux concerne le problème de l'estimation non paramétrique de la densité de probabilité d'une loi continue. Par exemple, en économétrie, la recherche se concentre sur des méthodes qui permettent de comprendre certains phénomènes aléatoires impliquant des données économiques. Une tâche cruciale est la modélisation de la structure probabiliste sous-jacente des données qui permet de décrire le mécanisme à partir duquel celles-ci ont été générées. Le principe de base en statistique inférentielle est de considérer que les données ont été générées par une loi de probabilité caractérisée par une densité de probabilité f qui est une fonction inconnue que l'on doit estimer sur la base d'un certain nombre n d'observations $X_1, X_2, ..., X_n$. Pour estimer f, deux approches sont possibles : l'approche paramétrique suppose que la densité f est connue à un nombre fini de paramètres près que l'on estime tandis que l'approche non paramétrique permet une grande flexibilité dans la forme possible de f en supposant que celle-ci appartient à une large collection de fonctions suffisamment régulières. En 1956, partant de la fonction de répartition empirique, Rosenblatt [**137**] a introduit son célèbre estimateur à noyau (voir également Parzen [**126**]) qui reste encore de nos jours très populaire dans la communauté statistique. Formellement, si $X_1, ..., X_n$ est une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ avec $p \geqslant 1$ et de densité de probabilité f (inconnue) par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, l'estimateur à noyau de Parzen-Rosenblatt est défini pour tout x dans $\mathbb{R}^p$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{nb_n^p} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{K}\left(\frac{x - X_i}{b_n}\right)$$

où K est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^p$ et où le paramètre de fenêtre b_n tend vers zéro par valeurs positives lorsque n tend vers l'infini. Le nombre d'articles scientifiques consacrés à l'étude de l'estimateur f_n est considérable lorsque les observations $X_1, ..., X_n$ forment une suite (cas temporel) d'observations indépendantes ou dépendantes dans le temps (voir Silverman [**142**]). Le cas spatial où les variables aléatoires $(X_i)_{i\in\Lambda}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ sont observées sur une région Λ d'un réseau tel que $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$ est une modélisation très utile par exemple en épidémiologie, en géologie, en science de l'environnement où les données sont souvent collectées sur des sites géographiques. Dans ce cadre, l'estimateur de Parzen-Rosenblatt s'écrit pour tout x dans $\mathbb{R}^p$,

$$f_n(x) = \frac{1}{|\Lambda_n| b_n^p} \sum_{i\in\Lambda_n} \mathrm{K}\left(\frac{x - X_i}{b_n}\right)$$

où $|\Lambda_n|$ désigne le nombre d'observations dans la région Λ_n. L'étude du cas spatial est relativement récente et très limitée si on la compare au cas temporel. L'un des premiers resultats qui établit la normalité asymptotique de f_n dans le cas spatial avec des observations dépendantes est du à Tran [**146**]. La principale difficulté du cas spatial réside dans la géométrie du réseau sur lequel sont indexées les observations. Mes articles [**55**], [**56**] et [**57**] sont mes contributions à ce problème. Ces résultats sont exposés dans le chapitre 4.

L'estimation de la densité permet d'étudier le problème de l'estimation de la fonction de régression : soit $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ un processus stationnaire bivarié à valeurs dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p'}$ avec p et p' deux entiers strictement positifs. Sur la base de cet échantillon, on souhaite estimer la fonction de régression r définie pour presque-tout x dans $\mathbb{R}^p$ par $r(x) = \mathbb{E}[Y_1 \mid X_1 = x]$. En 1964, Nadaraya [**121**] et Watson [**155**] ont proposé l'estimateur à noyau r_n défini pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ par

$$r_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \mathrm{K}\left(\frac{x-X_i}{b_n}\right)}{\sum_{i=1}^n \mathrm{K}\left(\frac{x-X_i}{b_n}\right)}$$

pour estimer la fonction de régression r. Dans le cas spatial, les observations sont de la forme $(X_i, Y_i)_{i\in\Lambda_n}$ où Λ_n est une partie finie de $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$. L'estimateur de Nadaraya-Watson s'écrit alors pour tout x dans $\mathbb{R}^p$,

$$r_n(x) = \frac{\sum_{i\in\Lambda_n} Y_i \mathrm{K}\left(\frac{x-X_i}{b_n}\right)}{\sum_{i\in\Lambda_n} \mathrm{K}\left(\frac{x-X_i}{b_n}\right)}$$

et mes contributions à l'étude de la convergence uniforme et de la normalité asymptotique de cet estimateur ont fait l'objet de deux publications [**53**] et [**63**] dont la dernière est un travail en collaboration avec R. Stoica. Ces deux travaux sont présentés dans le chapitre 4 de ce mémoire. Cependant, malgré sa très grande poularité, il est bien connu (voir [**68**]) que l'estimateur de Nadaraya-Watson possède quelques inconvénients tels un biais important et des performances médiocres au bord du support de la densité f estimée et que l'approche par polynômes locaux développée par Stone [**144**] et Cleveland [**35**] est généralement préférable. Les résultats présentés ici ont été publiés dans mon article [**58**] en collaboration avec K. Es-Sebaiy et I. Ouassou. Soit $(Y_i, X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On se propose d'estimer la fonction de régression g définie par $g(x) = \mathbb{E}[Y_0 \mid X_0 = x]$ pour presque-tout x dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et supposons que g est dérivable en x. Le principe est d'approximer $g(z)$ par $g(x) + g'(x)(z - x)$ pour tout z dans un voisinage de x et d'estimer simultanément $g(x)$ et $g'(x)$. On définit l'estimateur de la régression par polynômes locaux $(g_n, g_n')^\top$ de $(g, g')^\top$ en x par

$$\begin{pmatrix} g_n(x) \\ g_n'(x) \end{pmatrix} = \underset{(s,t)\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{i\in\Lambda_n} (Y_i - s - t(X_i - x))^2 \, \mathrm{K}\left(\frac{X_i - x}{b_n}\right), \tag{8}$$

où b_n est le paramètre de fenêtre qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, Λ_n est le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ sur lequel sont indexées les observations X_i et K est un noyau de probabilité. Dans mon article [**58**] en collaboration avec K. Es-Sebaiy et I. Ouassou, j'ai obtenu la normalité asymptotique de l'estimateur (8) sous des conditions minimales sur le paramètre de fenêtre et sous une condition simple sur la vitesse de décroissance des coefficients de mélange fort du champ aléatoire consiéré. Le résultat obtenu généralise dans plusieurs directions un résultat précédent de Hallin et al. [**85**] (voir chapitre 3).

Chapitre 1

Théorèmes limite pour les suites stationnaires

Dans ce chapitre, je présente mes contributions [**62**] et [**65**] au problème de la vitesse de convergence dans le TLC et le TLL pour les suites d'accroissements d'une martingale ainsi que mes articles [**51**] et [**59**] sur une caractérisation du mélange faible dans un système dynamique en théorie ergodique et sur l'estimation paramétrique du drift pour le processus de Ornstein-Uhlenbeck dirigé par un processus gaussien respectivement.

1. Vitesse de convergence dans le théorème limite central

Rappelons que Lyapunov [**113**] fut le premier à donner une démonstration rigoureuse du TLC pour les variables aléatoires réelles indépendantes.

Théorème 1 (Lyapunov, 1901). *Si $(X_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires réelles iid et si X_0 est de moyenne nulle et de variance 1 alors la suite $(n^{-1/2}\sum_{k=0}^{n-1} X_k)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une gaussienne centrée-réduite.*

En 1922, Lindeberg [**108**] a étendu le TLC de Lyapunov [**113**] à des suites de variables aléatoires indépendantes et non nécessairement identiquement distribuées. En adaptant la méthode de Lindeberg, Ibragimov [**92**] a démontré (indépendamment de Billingsley [**11**]) que le TLC est également valide pour les suites stationnaires ergodiques d'accroissements d'une martingale de carrés intégrables. Ce résultat est connu sous le nom de TLC de Billingsley-Ibragimov pour les martingales. D'autre part, la vitesse de convergence dans le TLC pour les variables aléatoires indépendantes est un résultat fondamental établi par Berry [**9**] et Esseen [**67**].

Théorème 2 (Berry, Esseen, 1941-42). *Si $(X_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires iid, de moyenne nulle, de variance $\sigma^2 > 0$ telle que $\mathbb{E}\left[|X_0|^3\right] < \infty$ alors il existe une constante universelle $\kappa > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$\Delta_n := \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \leqslant x\sigma\sqrt{n}\right) - \Phi(x)\right| \leqslant \frac{\kappa\mathbb{E}\left[|X_0|^3\right]}{\sigma^3\sqrt{n}} \quad avec \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt.$$

Le théorème 2 donne ainsi la vitesse de convergence (optimale) en $n^{-1/2}$ pour la distance de Kolmogorov dans le TLC pour les variables aléatoires indépendantes.

Dès lors, la généralisation de ce résultat pour des variables dépendantes a fait l'objet d'innombrables articles. Cependant, il s'avère qu'il est souvent nécessaire d'imposer des conditions très fortes pour obtenir une vitesse meilleure que $n^{-1/4}$. Pour tout $p \geqslant 1$ et toute tribu $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$, on rappelle que $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ est l'espace des variables aléatoires p-intégrables définies sur $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ et que la norme $\|\,.\,\|_p$ est définie par $\|Z\|_p^p = \int_\Omega |Z(\omega)|^p d\mu(\omega)$ pour tout Z dans

$\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. On considère également l'espace $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \ominus \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ de toutes les variables aléatoires Z dans $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ telles que $\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{M}] = 0$ p.s.

Définition 1. *On dit qu'une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est une suite d'accroissements d'une martingale si il existe une filtration croissante $(\mathcal{G}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}_{k+1} \subset \mathcal{F}$ et $X_k \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{G}_k, \mu) \ominus \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{G}_{k-1}, \mu)$ pour tout k dans $\mathbb{Z}$.*

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements d'une martingale, la vitesse de convergence dans le TLC dépend du comportement asymptotique de leurs variances conditionnelles comme le met en évidence le résultat suivant établi par Bolthausen [**13**] et qui donne ainsi une vitesse de convergence dans le TLC de Billingsley-Ibragimov.

Théorème 3 (Bolthausen, 1982). *Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite d'accroissements d'une martingale et soit $n \geqslant 1$ tel que $\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \|X_k\|_\infty < \infty$ alors il existe une constante $\kappa > 0$ (ne dépendant pas de n) telle que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leqslant x v_n \right) - \Phi(x) \right| \leqslant \kappa \left(\frac{n \log n}{v_n^3} + \left\| V_n^2 - 1 \right\|_1^{1/3} \wedge \left\| V_n^2 - 1 \right\|_\infty^{1/2} \right)$$

où

$$V_n^2 = v_n^{-2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \quad \text{et} \quad v_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2 \right].$$

Bolthausen [**13**] démontre que cette vitesse ne peut pas être améliorée sous les hypothèses du théorème 3. Néanmoins, on peut se poser la question de savoir si la classe des suites d'accroisssements d'une martingale pour lesquelles cette vitesse est atteinte peut être élargie aux accroissements non bornés d'une martingale. Avec L. Ouchti, nous nous sommes intéressé à cette question dans [**62**] en introduisant la classe $\mathcal{M}(\gamma)$ des suites d'accroissements d'une martingale pour une filtration donnée $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ qui vérifient pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $\mathbb{E}\left[|X_k|^3 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \leqslant \gamma \mathbb{E}\left[X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right]$ p.s. où γ est une constante strictement positive.

Théorème 4 (El Machkouri, Ouchti, 2007). *Pour tout $\gamma > 0$, il existe une constante $\kappa > 0$ telle que pour toute suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ appartenant à la classe $\mathcal{M}(\gamma)$, on ait*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leqslant x v_n \right) - \Phi(x) \right| \leqslant \kappa \left(\frac{\gamma \log n}{v_n} + \left\| V_n^2 - 1 \right\|_1^{1/3} \wedge \left\| V_n^2 - 1 \right\|_\infty^{1/2} \right).$$

Nous obtenons ainsi une extension du théorème 3 pour une classe de martingales dont les accroissements ne sont pas nécessairement bornés. Récemment, X. Fan [**69**] a amélioré la vitesse de convergence obtenue dans le théorème 4 et ses résultats s'appliquent également à des accroissements d'une martingale dont les moments conditionnels d'ordre 3 ne sont pas nécessairement uniformément bornés.

2. Théorème limite local pour les martingales

Considérons une suite $(X_k)_{k\geq 0}$ de variables aléatoires réelles iid de moyenne nulle et de variance 1 et supposons que la loi de X_0 admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la densité de la variable aléatoire $n^{-1/2} \sum_{k=0}^{n-1} X_k$ et on dit que le théorème limite local (TLL) a lieu si la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la densité φ de la loi normale standard. Comme la convergence des densités f_n n'est pas une conséquence de la convergence des fonctions de répartitions F_n, il est nécessaire d'imposer des conditions supplémentaires sur la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$ pour obtenir la convergence des densités f_n. Cette question a été résolue par Gnedenko [**73**] avec le résultat suivant.

Théorème 5 (Gnedenko, 1954). *Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles iid telle que X_0 soit de moyenne nulle et de variance 1 et notons f_n et φ les densités respectives de la variable aléatoire $n^{-1/2}(X_0 + \ldots + X_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$ et de la loi normale standard par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - \varphi(x)| = 0$$

est qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que la densité f_{n_0} soit bornée.

Supposons à présent que $(X_k)_{k\geq 0}$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (non dégénérée) et supposons qu'il existe deux réels b et $h > 0$ tels que X_0 prenne presque-sûrement des valeurs de la forme $b + Nh$ lorsque N parcours $\mathbb{Z}$. On appelle h le pas du réseau et on dit que h est maximal si h est la plus grande constante strictement positive telle que la loi de X_0 soit concentrée sur l'ensemble $\{b + Nh\,;\, N \in \mathbb{Z}\}$. Supposons que X_0 soit de variance finie $\sigma^2 > 0$ et de moyenne m. Pour tous entiers N et $n \geq 1$, on note

$$P_n(N) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=0}^{n-1} X_k = nb + Nh\right).$$

Le TLL suivant a été également obtenu par Gnedenko [**72**] et étend un résultat de Moivre [**40**] et Laplace [**105**] pour des variables aléatoires de Bernoulli.

Théorème 6 (Gnedenko, 1948). *Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\sup_{N\in\mathbb{Z}} \left| \frac{\sigma\sqrt{n}P_n(N)}{h} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{nb + Nh - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

est que le pas h du réseau soit maximal.

Dans mon article [**65**] en collaboration avec D. Volný, nous avons mis en évidence que les hypothèses dans les deux TLL de Gnedenko (Théorèmes 5 et 6) ne sont pas suffisantes pour obtenir les résultats analogues pour les accroissements d'une martingale.

Définition 2. *On dit que $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements d'une martingale au sens fort (AMF) si $\mathbb{E}\left[X_k \mid \sigma(X_j\,;\, j \neq k)\right] = 0$ p.s. pour tout k dans $\mathbb{Z}$.*

Dans toute la suite, nous considérons le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ où Ω est un espace de Lebesgue, μ est une mesure de probabilité et T est un automorphisme mesurable de Ω qui préserve la mesure μ. On note $\mathcal{I}$ la tribu des éléments A de $\mathcal{F}$ qui sont T-invariants (i.e. les éléments A de $\mathcal{F}$ qui vérifient $TA = A$ p.s.). Nous dirons que la mesure μ ou que le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ est ergodique si tout élément de $\mathcal{I}$ est de mesure 0 ou 1. Pour tout entier $n \geq 1$, tout réel x et toute variable aléatoire f de moyenne nulle et de variance finie $\sigma^2 > 0$, on adopte les notations suivantes

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \quad \text{et} \quad F_n(f, x) = \mu\left(S_n(f) \leq x\sigma\sqrt{n}\right). \tag{9}$$

Supposons que le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ soit ergodique et d'entropie strictement positive (cf. Petersen [**131**] pour une définition de l'entropie).

Théorème 7 (El Machkouri, Volný, 2004). *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs qui décroît vers zéro. Il existe une variable aléatoire f dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ telle que la loi de f soit non dégénérée et portée par l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$, le processus stationnaire $(f \circ T^k)_{k\geq 0}$ soit de type AMF et telle qu'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ d'entiers de sorte que pour tout $k \geq 0$,*

$$\mu(S_{n_k}(f) = 0) \geq a_{n_k} \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{n_k}(f, x) - \Phi(x)| \geq \frac{a_{n_k}}{2}. \tag{10}$$

D'après le TLC de Billingsley-Ibragimov pour les martingales, les quantités $\mu(S_n(f) = 0)$ et $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(f, x) - \Phi(x)|$ convergent nécessairement vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Le théorème 7 met ainsi en évidence que la vitesse de convergence dans le TLC de Billingsley-Ibragimov pour les martingales peut être arbitrairement lente même si les accroissements d'une martingale considérés sont bornés et de type AMF. Une autre conséquence du théorème 7 est que le TLL pour les accroissements d'une martingale à valeurs dans un réseau peut ne pas être valide même si le pas du réseau est maximal. En d'autres termes, les hypothèses du théorème 6 de Gnedenko [**72**] ne sont pas suffisantes pour obtenir le TLL pour les accroissements (bornés) d'une martingale (de type AMF).

En 2002, T. de la Rue [**39**] a obtenu un résultat sur la vitesse de dispersion pour une classe de martingales qui ne satisfont pas nécessairement le TLC.

Théorème 8 (de la Rue, 2002). *Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements bornés d'une martingale et s'il existe une constante $\beta > 0$ telle que $\inf_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[X_k^2 \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right] \geqslant \beta$ alors il existe deux constantes strictement positives κ et λ telles que pour tout $n \geqslant 1$,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \in [t-1, t+1]\right) \leqslant \kappa n^{-\lambda}.$$

On peut vérifier que, par construction, les variances conditionnelles des accroissements de la martingale $\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ dans le théorème 7 s'annule sur un ensemble mesurable de mesure strictement positive (voir preuve du théorème 7 dans [**65**]). Ainsi, une autre conséquence du théorème 7 est que la vitesse de dispersion pour une martingale peut être arbitrairement lente si les variances conditionnelles ne sont pas minorées uniformément par une constante strictement positive. En d'autres termes, la condition $\inf_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[X_k^2 \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right] \geqslant \beta$ ne peut pas être purement et simplement supprimée dans le théorème 8.

À présent, supposons que le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ soit ergodique et d'entropie infinie. Le résultat suivant (établi dans [**65**]) est l'analogue du théorème 7 pour les martingales admettant des densités par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 9 (El Machkouri, Volný, 2004). *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs qui décroît vers zéro. Pour toute constante positive L suffisamment grande, il existe une variable aléatoire f dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ telle que les variables aléatoires $\{S_n(f)\,;\, n \geq 1\}$ aient des densités par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, la densité de f est bornée, la suite $(f\circ T^k)_{k\geq 0}$ est de type AMF et il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ d'entiers ainsi qu'une suite $(\rho_k)_{k\geq 0}$ de réels strictement positifs qui converge vers zéro telles que pour tout $k \geq 0$,*

$$\frac{1}{\rho_k}\mu\left(\frac{S_{n_k}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n_k}} \in [-\rho_k, \rho_k]\right) \geq L \quad et \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{n_k}(f,x) - \Phi(x)| \geq a_{n_k}. \tag{11}$$

De nouveau, le théorème 9 montre que le TLL peut ne pas avoir lieu pour une suite d'accroissements (bornés) d'une martingale (de type AMF) même si la densité de probabilité du premier terme de la martingale est supposée bornée. En effet, si le TLL a lieu pour $(f\circ T^k)_{k\geqslant 0}$, on aurait nécessairement

$$\frac{1}{\rho_k}\mu\left(\frac{S_{n_k}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n_k}} \in [-\rho_k, \rho_k]\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 2\varphi(0)$$

où φ est la densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Or, ceci contredit (11) pour L suffisamment grand. Ainsi, les hypothèses du théorème 5 de Gnedenko [**73**] ne suffisent pas pour obtenir le TLL pour les accroissements d'une martingale. A ma connaissance, il n'existe pas dans la littérature de résultat donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour la validité du TLL pour les martingales. La question reste ouverte à ce jour.

3. Un théorème limite central pour des processus linéaires à valeurs hilbertiennes

À présent, je présente le travail contenu dans mon article [**54**]. Soit $(H, \|.\|_H)$ un espace de Hilbert séparable et soit $(\mathcal{L}, \|.\|_{\mathcal{L}(H)})$ la classe des opérateurs linéaires bornés de H dans H muni de la norme usuelle. Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires iid, de moyenne nulle et de variance finie et à valeurs dans H telle que $\mathbb{E}\left[\|\varepsilon_0\|_H\right] < \infty$ et soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}$ telle que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|a_j\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty$. Le processus linéaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est alors défini pour tout k dans $\mathbb{Z}$ par

$$X_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j(\varepsilon_{k-j}). \tag{12}$$

Merlevède et al. [**118**] ont démontré que le processus linéaire défini par (12) satisfait le TLC sous la condition $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|a_j\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty$. Notons C l'opérateur d'autocovariance de ε_0 et posons $A = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j$ et A^* son adjoint. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note également

$$\Delta_n = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k \right\|_H \leqslant t \right) - \mathbb{P}\left(\|N\|_H \leqslant t\right) \right|$$

où $N \sim \mathcal{N}(0, ACA^*)$. Le résultat suivant est démontré dans [**54**].

Théorème 10 (El Machkouri, 2010). *Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ des variables aléatoires iid, centrées et à valeurs dans H.*

i) Si $\|\varepsilon_0\|_H$ est bornée p.s. et si $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |j|\, \|a_j\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty$ alors $\Delta_n = O\left(n^{-1/2}\right)$.

ii) Si $\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\,\|\varepsilon_0\|_H\right)\right] < \infty$ avec $\theta > 0$ et si $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sqrt{|j|}\, \|a_j\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty$ alors $\Delta_n = O\left(n^{-1/2}\log n\right)$.

iii) Si $\mathbb{E}\left[\|\varepsilon_0\|_H^p\right] < \infty$ *avec* $p \geqslant 3$ *et si* $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sqrt{|j|}\, \|a_j\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty$ *alors* $\Delta_n = O\left(n^{-\frac{p}{2(p+1)}}\right)$.

On peut noter qu'un résultat similaire avait été proposé auparavant par Bosq [**16**] mais cependant sa démonstration était éronnée (voir [**17**]).

4. Estimation paramétrique du drift pour un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Dans cette partie, je présente un travail en collaboration avec K. Es-Sebaiy et Y. Ouknine publié dans [**59**]. Il s'agit d'une étude de l'estimateur des moindres carrés pour le drift d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dirigé par un processus gaussien fractionnaire. Plus précisement, considérons le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(X_t)_{t\geqslant 0}$ défini par l'équation différentielle stochastique

$$X_0 = 0 \quad \text{et} \quad dX_t = \theta X_t dt + dG_t, \quad t \geqslant 0 \tag{13}$$

où G est un processus gaussien et θ est un paramètre réel non nul inconnu (drift). Lorsque le processus $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ est observable, une question importante est l'estimation du paramètre θ sur la base de cette trajectoire. Cette question a été très étudiée dans le cas où G est un mouvement brownien (voir par exemple [**104**] et [**109**]) avec en particulier l'approche très populaire de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Lorsque $\theta < 0$ (cas ergodique) et $G = B^H$ où B_H est un mouvement brownien fractionnaire d'indice $H > 1/2$, on peut vérifier que l'intégrale $\int_0^t X_s dX_s$ est bien définie au sens de Young [**161**]. Dans ce contexte, Hu et Nualart [**89**] (voir aussi [**90**]) ont proposé l'estimateur des moindres carrés

$$\hat{\theta}_t = \frac{\int_0^t X_s dX_s}{\int_0^t X_s^2 ds} = \frac{X_t^2}{2\int_0^t X_s^2 ds}, \quad t \geqslant 0,$$

On remarquera que la seconde expression de $\hat{\theta}_t$ s'obtient par une intégration par parties. Ceci nous a conduit à proposer directement comme estimateur du drift θ dans (13), la statistique

$$\tilde{\theta}_t = \frac{X_t^2}{2\int_0^t X_s^2 ds}, \quad t \geqslant 0$$

et à étudier la loi asymptotique ainsi que la convergence p.s. de cet estimateur. Dans toute la suite, on suppose que $\theta > 0$ (cas non ergodique). Considérons les hypothèses suivantes :

(A1) G est un processus gaussien centré à trajectoires hölderiennes d'ordre $\delta > 0$.

(A2) Il existe $c > 0$ et $\gamma > 0$ telles que $\mathbb{E}\left[G_t^2\right] \leqslant ct^{2\gamma}$ pour tout $t \geqslant 0$.

Le résultat suivant est démontré dans [**59**].

Théorème 11 (El Machkouri, Es-Sebaiy, Ouknine, 2016). *Si* (*A*1) *et* (*A*2) *sont vraies alors* $\tilde{\theta}_t$ *converge p.s. vers* θ *lorsque* t *tend vers l'infini.*

Pour déterminer la loi asymptotique de $\tilde{\theta}_t$, nous considérons les deux hypothèses supplémentaires suivantes :

(A3) Il existe $\sigma_G^2 > 0$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[\left(e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta s} dG_s\right)^2\right] = \sigma_G^2.$$

(A4) Pour tout $s \geqslant 0$,

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}\left[G_s e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta r}\, dG_r\right] = 0.$$

Théorème 12 (El Machkouri, Es-Sebaiy, Ouknine, 2016). *Si* $(A1)$ *à* $(A4)$ *sont vraies alors*

$$e^{\theta t}\left(\tilde{\theta}_t - \theta\right) \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{Law} 2\theta\mathcal{C}(1)$$

où $\mathcal{C}(1)$ *est la loi de Cauchy standard.*

En particulier, on peut vérifier (en utilisant le critère de continuité de Kolmogorov) que les hypothèses $(A1)$ à $(A4)$ sont satisfaites par le mouvement brownien fractionnaire B^H, le mouvement brownien sous-fractionnaire S^H ou encore le mouvement brownien bifractionnaire $B^{H,K}$ pour tout $(H,K)\in]0,1[^2$. Les théorèmes 11 et 12 étendent ainsi les résultats obtenus dans [**7**] pour le cas particulier où G est un mouvement brownien fractionnaire d'indice strictement supérieur à 2.

5. Une caractérisation du mélange faible en théorie ergodique

Dans ce paragraphe, je présente un travail en collaboration avec E. H. El Abdaloui et A. Nogueira qui fait l'objet de l'article [**51**]. Dans ce travail, nous donnons une nouvelle caractérisation de la propriété de mélange faible dans un système dynamique en théorie ergodique. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu,T)$ un système dynamique où $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ est un espace probabilisé et $T:\Omega\longrightarrow\Omega$ est un automorphisme qui préserve la mesure μ (i.e. $\mu(T^{-1}A)=\mu(A)$ pour tout A dans $\mathcal{F}$). Rappelons qu'un ensemble mesurable A est dit invariant pour T si $\mu(T^{-1}A\Delta A)=0$ et que T est ergodique si tout ensemble invariant pour T est de mesure 0 ou 1. Pour toute fonction mesurable f et tout entier $n\geqslant 1$, on pose

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f\circ T^i.$$

Définition 3. *On dit que T est mélangeante (resp. faiblement mélangeante) si pour toute fonction mesurable f de carré intégrable et de moyenne nulle, on a*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega f\circ T^n\, f\,d\mu\right| = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\int_\Omega f\circ T^n\, f\,d\mu\right| = 0\right).$$

Une caractérisation classique du mélange faible en théorie ergodique est la suivante : T est faiblement mélangeante si et seulement si 1 est la seule valeur propre de l'opérateur U_T défini pour toute fonction f mesurable par $U_T f = f\circ T$. Pour des exemples de transformation qui soit faiblement mélangeante mais non (fortement) mélangeante, le lecteur peut se référer aux publications [**30**], [**31**], [**86**] et [**98**]. En 1961, Leonov [**106**] a démontré que si T est (fortement) mélangeante alors pour tout mesurable A tel que $\mu(A)>0$, on a $\|S_n(\mathbb{1}_A-\mu(A))\|_2\longrightarrow\infty$ lorsque n tend vers l'infini. En 1996, Kachurovskii [**96**] a conjecturé le résultat suivant.

Conjecture de Kachurovskii (1996). *T est (fortement) mélangeante si et seulement si pour tout mesurable A tel que $\mu(A)>0$, on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathbb{1}_A\circ T^k - \mu(A)\right)\right\|_2 = \infty.$$

Malheureusement, nous n'avons pas été en mesure de démontrer cette conjecture mais nous avons donner une réponse positive à la conjecture analogue pour le mélange faible. Le résultat suivant est démontré dans [**51**].

Théorème 13 (El Abdalaoui, El Machkouri, Nogueira, 2010). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ *un système dynamique ergodique. La transformation* T *est faiblement mélangeante si et seulement si pour tout mesurable* A *tel que* $\mu(A) > 0$, *on a*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{k-1} \left(\mathbb{1}_A \circ T^i - \mu(A) \right) \right\|_2 = \infty.$$

La preuve du théorème 13 est essentiellement basée sur la caractérisation du mélange faible en terme de valeurs propres de l'opérateur U_T et un résultat de Halasz [**80**] que l'on peut retrouver à la page 107 dans [**51**].

Chapitre 2

Théorème limite central et principe d'invariance pour les champs stationnaires

Considérons une suite stationnaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t de $[0, 1]$, on note

$$S_n(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} X_i + (nt - \lfloor nt \rfloor) X_{\lfloor nt \rfloor} \tag{14}$$

où $\lfloor\,.\,\rfloor$ désigne la fonction partie entière. On dit que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfait un théorème limite central fonctionnel (TLCF) ou encore un principe d'invariance si la suite de processus de sommes partielles $\{n^{-1/2} S_n(t)\,;\ t \in [0, 1]\}_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers un mouvement brownien dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$ des fonctions réelles continues définies sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme. En remarquant que la fonction réelle définie sur l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$ qui à une fonction g associe le réel $g(1)$ est continue par rapport à la norme uniforme, le TLC devient un cas particulier du TLCF. Le premier principe d'invariance a été établi par Donsker [**46**] pour des suites de variables aléatoires iid. Pour les suites stationnaires d'accroissements d'une martingale, le résultat est du à Billingsley [**11**]. Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ aléatoire stationnaire, on étend la définition (6) en posant pour tout entier $n \geq 1$ et tout borélien A de $[0, 1]^d$,

$$\nu_n(A) = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \lambda_{i/n}(A) X_i = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \lambda(nA \cap R_i) X_i \tag{15}$$

où $\lambda_{i/n}$ est la mesure de probabilité sur $\left([0, 1]^d, \mathcal{B}\left([0, 1]^d\right)\right)$ de densité $n^d\, \mathbb{1}_{R_{i/n}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$ et pour tout $i = (i_1, \ldots, i_d)$ dans $\mathbb{Z}^d$,

$$R_{i/n} = \left]\frac{i_1 - 1}{n}, \frac{i_1}{n}\right] \times \ldots \times \left]\frac{i_d - 1}{n}, \frac{i_d}{n}\right].$$

Considérons la classe Q_d des pavés de $[0, 1]^d$ de la forme $[0, t] = [0, t_1] \times \ldots \times [0, t_d]$ pour tout $t = (t_1, \ldots, t_d)$ dans $[0, 1]^d$. On voit que le processus $\{S_n(t)\,;\ t \in [0, 1]\}$ défini par (14) peut s'écrire $\{\nu_n(A)\,;\ A \in \mathrm{Q}_1\}$ où Q_1 est la classe des intervalles d'origine 0 de $[0, 1]$. En dimension 1, les intervalles sont à la fois les connexes, les convexes et les boules euclidiennes et par conséquent la classe Q_1 est la principale classe d'intérêt pour les processus indexés par des ensembles. En revanche, en dimension supérieure, la collection des pavés n'est qu'une classe parmi d'autres. C'est pourquoi, il est intéressant d'étudier la validité du principe d'invariance pour des classes $\mathcal{A}$ de boréliens de $[0, 1]^d$ aussi larges que possibles. Pour cela, on munit $\mathcal{A}$ d'une structure d'espace pseudo-métrique en posant $\rho(A, B) = \sqrt{\lambda(A\Delta B)}$ pour tous A et B dans $\mathcal{A}$. On appelle entropie métrique de la classe $\mathcal{A}$ et on note $H(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)$ le logarithme du plus petit nombre de boules de rayon ε (pour la pseudo-métrique ρ) nécessaires pour recouvrir $\mathcal{A}$. Notons $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $\mathcal{A}$ muni de la norme $\|f\|_{\mathcal{A}} = \sup_{A\in\mathcal{A}} |f(A)|$. On dit que W est un mouvement brownien standard indexé par $\mathcal{A}$ si W est un processus gaussien dont les trajectoires appartiennent à $C(\mathcal{A})$ et qui satisfait l'égalité $\mathrm{Cov}\,(W(A), W(B)) = \lambda(A\cap B)$. D'après Dudley [**49**], nous savons qu'un tel processus existe dès que

$$\text{(H)} \qquad \int_0^1 \sqrt{H(\mathcal{A},\rho,\varepsilon)}\, d\varepsilon < \infty.$$

La condition (H) est satisfaite par une famille importante de classes d'ensembles appelées classes de Vapnik-Chervonenkis dont la classe Q_d des pavés et les boules euclidiennes de $[0,1]^d$ font partie. La condition (H) de Dudley est également satisfaite par des classes plus "grosses" comme les convexes de $[0,1]^2$ ou la classe des ensembles à bords α-différentiables avec $\alpha > d-1$ (cf. Dudley [**50**]) lorsque $d \geqslant 2$.

Une notion plus stricte d'entropie métrique est celle d'entropie métrique avec inclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose qu'il existe une collection finie $\mathcal{A}(\varepsilon)$ de boréliens de $[0,1]^d$ telle que pour tout A dans $\mathcal{A}$, il existe A^- et A^+ dans $\mathcal{A}(\varepsilon)$ tels que $A^- \subset A \subset A^+$ et $\rho(A^-, A^+) \leq \varepsilon$. On appelle entropie métrique avec inclusion et on note $\mathbb{H}(\mathcal{A},\rho,\varepsilon)$, le logarithme népérien du cardinal de la plus petite collection $\mathcal{A}(\varepsilon)$ satisfaisant cette propriété. Puisque $H(\mathcal{A},\rho,\varepsilon) \leq \mathbb{H}(\mathcal{A},\rho,\varepsilon)$, le mouvement brownien standard W indexé par la collection $\mathcal{A}$ est bien défini lorsque

$$(\mathbb{H}) \qquad \int_0^1 \sqrt{\mathbb{H}(\mathcal{A},\rho,\varepsilon)}\, d\varepsilon < \infty.$$

Nous dirons qu'un champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ satisfait un TLCF (ou un principe d'invariance) si la suite $\{n^{-d/2}\nu_n(A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ converge en loi dans l'espace $C(\mathcal{A})$ vers un mélange de mouvements browniens indexés par la classe $\mathcal{A}$ (i.e. le processus limite est de la forme $\eta\, W$ où W est un mouvement brownien indexé par $\mathcal{A}$ et η est une variable aléatoire positive indépendante de W). Les premiers résultats de ce type ont été obtenus par Wichura [**157**] lorsque la classe $\mathcal{A}$ coïncide avec la classe Q_d des pavés de $[0,1]^d$ et pour des champs de variables aléatoires réelles iid de carrés intégrables améliorant ainsi celui de Kuelbs [**103**] dans lequel des conditions plus restrictives sont requises au niveau des moments. Ces résultats se réduisent en dimension 1 au principe d'invariance de Donsker [**46**]. Basu et Dorea [**5**] ont montré que le principe d'invariance a encore lieu lorsque le processus de sommes partielles défini par (7) est indexé par la classe Q_d des pavés de $[0,1]^d$ et issu d'un champ aléatoire réel stationnaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de type accroissement d'une martingale en un sens renforcé.

1. Un contre-exemple

L'un des premiers principes d'invariance pour de larges classes de boréliens de $[0,1]^d$ a été établi pour des champs de variables aléatoires réelles iid par Bass [**4**] et indépendamment Alexander et Pyke [**1**].

Théorème 14 (Bass, 1985, Alexander et Pyke, 1986). *Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de variables aléatoires réelles iid, de moyenne nulle et de carré intégrable et si $\mathcal{A}$ satisfait la condition* $(\mathbb{H})$ *alors le principe d'invariance a lieu.*

Une question naturelle est de savoir si ce principe d'invariance est encore valide lorsque l'on remplace la condition ($\mathbb{H}$) par la condition moins restrictive (H) de Dudley. Dans mon article [**61**] en collaboration avec L. Ouchti, nous avons répondu à cette question en établissant le résultat suivant.

Théorème 15 (El Machkouri, Ouchti, 2006). *Pour tout réel p positif, il existe un champ* $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *de variables aléatoires réelles iid, symétriques et p-intégrables et une classe* $\mathcal{A}$ *de boréliens réguliers de* $[0,1]^d$ *vérifiant la condition d'entropie métrique* (H) *tels que le processus de sommes partielles* $\{n^{-d/2}\nu_n(A)\,;\,A\in\mathcal{A}\}$ *ne converge pas en loi dans l'espace* $C(\mathcal{A})$.

Le théorème 15 met en évidence que la condition ($\mathbb{H}$) dans le théorème 14 ne peut pas être purement et simplement remplacée par la condition (H). Pour obtenir un principe d'invariance pour des classes de boréliens satisfaisant seulement la condition (H), on est contraint d'imposer des hypothèses plus fortes sur les moments des variables aléatoires. Par exemple, en 2001, Dedecker [**42**] a introduit un nouveau critère pour la validité du principe d'invariance sous la condition (H) lorsque les variables aléatoires sont bornées. Rappelons que sur $\mathbb{Z}^d$, on définit la relation d'ordre lexicographique $<_{\mathrm{lex}}$ de la façon suivante : si $i=(i_1,\dots,i_d)$ et $j=(j_1,\dots,j_d)$ sont deux éléments de $\mathbb{Z}^d$ distincts, la notation $i<_{\mathrm{lex}} j$ signifie que ou bien $i_1<j_1$ ou bien il existe $2\leqslant \ell\leqslant d$ tel que $i_\ell<j_\ell$ et $i_q=j_q$ pour $1\leq q<\ell$.

Théorème 16 (Dedecker, 2001). *Si* $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *est un champ aléatoire réel stationnaire de moyenne nulle tel que* $X_0\in\mathbb{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *et*

$$\sum_{k<_{\mathrm{lex}}0}\|X_k\mathbb{E}\left[X_0\,|\,\mathcal{F}_k\right]\|_\infty<\infty\quad \textit{avec}\quad \mathcal{F}_k=\sigma\left(X_j\,;\,j<_{\mathrm{lex}}0 \textit{ et } |j|\geq|k|\right)\quad \textit{et}\quad |k|=\max_{1\leq j\leq d}|k_j| \tag{16}$$

et si $\mathcal{A}$ *est une collection de boréliens réguliers de* $[0,1]^d$ *satisfaisant la condition* (H) *de Dudley alors le principe d'invariance a lieu.*

Définition 4. *On dit qu'un champ aléatoire réel* $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *est un champ de type accroissement d'une martingale (en abrégé AM) si pour tout k dans* $\mathbb{Z}^d$*,* X_k *est* $\mathbb{P}$*-intégrable et*

$$\mathbb{E}\left[X_k\,|\,\mathcal{G}_k\right]=0\quad p.s.\quad où\quad \mathcal{G}_k=\sigma\left(X_j\,;\,j<_{lex}k\right).$$

Une définition plus restrictive est celle introduite par Nahapetian et Petrosian [**122**].

Définition 5. *On dit qu'un champ* $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *est un champ aléatoire de type accroissement d'une martingale au sens fort (en abrégé AMF) si pour tout k dans* $\mathbb{Z}^d$*,* X_k *est* $\mathbb{P}$*-intégrable et*

$$\mathbb{E}\left[X_k\,|\,\mathcal{H}_k\right]=0\quad p.s.\quad où\quad \mathcal{H}_k=\sigma\left(X_j\,;\,j\neq k\right).$$

Les champs aléatoires de type AM ou de type AMF vérifient le critère projectif (16). Dans mon article [**64**] en collaboration avec D. Volný, pour tout $p>0$, nous avons construit un champ stationnaire de variables aléatoires p-intégrables de type AMF et une classe $\mathcal{A}_0$ de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ satisfaisant la condition ($\mathbb{H}$) tels que le principe d'invariance n'ait pas lieu. Pour cela, considérons un système dynamique $(\Omega,\mathcal{F},\mu,T)$ où Ω est un espace de Lebesgue, μ est une mesure de probabilité et T est une action de $\mathbb{Z}^d$ préservant la mesure μ (i.e. pour tous éléments i et j dans $\mathbb{Z}^d$, T^i et T^j sont des transformations mesurables définies de Ω dans Ω qui préservent la mesure μ et qui vérifient $T^i\circ T^j=T^{i+j}$). Un élément A de la tribu $\mathcal{F}$ est dit invariant si $T^k A = A$ p.s. pour tout élément k de $\mathbb{Z}^d$. On note $\mathcal{I}$ la tribu des éléments invariants de $\mathcal{F}$ et on dit que μ est ergodique si tout élément A de $\mathcal{I}$ est de mesure 0 ou 1. Supposons que l'entropie du système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ soit strictement positive (voir [**131**] pour une définition de l'entropie) et que la mesure μ soit ergodique. Si n est un entier strictement positif, A un borélien de $[0,1]^d$ et f une application réelle mesurable définie sur Ω, on adopte la notation suivante

$$S_n(f, A) = \sum_{i \in \{1,\dots,n\}^d} \lambda(nA \cap R_i)\, f \circ T^i.$$

Théorème 17 (El Machkouri, Volný, 2003). *Pour tout réel p positif, il existe une application réelle f dans $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et une classe $\mathcal{A}$ de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ vérifiant la condition $(\mathbb{H})$ telles que le champ aléatoire stationnaire $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ soit de type AMF mais ne satisfasse pas le principe d'invariance relativement à la classe $\mathcal{A}$. Autrement dit, le processus de sommes partielles $\{n^{-d/2} S_n(f, A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ ne converge pas en loi dans l'espace $C(\mathcal{A})$.*

Le théorème 16 met en évidence que le principe d'invariance a lieu pour les champs de variables aléatoires bornées et de type AMF sous la condition (H) tandis que le théorème 17 montre que le principe d'invariance n'a plus nécessairement lieu si l'on considère des champs p-intégrables de type AMF et ceci même lorsque l'on considère des classes de boréliens vérifiant la condition $(\mathbb{H})$. Néanmoins, si on considère la classe Q_d des pavés de $[0,1]^d$, Basu et Dorea [**5**] ont établi le principe d'invariance pour une classe de champs de variables aléatoires conditionnellement centrées et de carrés intégrables qui contient les champs de type AMF et qui est contenue dans la classe des champs de type AM. Toujours pour le cas particulier de la classe des pavés $\mathcal{Q}_d$, Dedecker [**42**] a également montré que son critère (16) est une condition suffisante pour la validité du principe d'invariance lorsque le champ aléatoire considéré a des moments d'ordre $p > 2$. Enfin, on peut noter que Ziegler [**162**] a démontré que le principe d'invariance de Bass [**4**] et Alexander et Pyke [**1**] a lieu pour toute collection $\mathcal{A}$ satisfaisant la condition

$$\int_0^1 \sqrt{\log\, N(\mathcal{A}, \varepsilon)}\, d\varepsilon < \infty \tag{17}$$

où $N(\mathcal{A}, \varepsilon) = \sup_\mu N(\mathcal{A}, \rho_\mu, \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et ρ_μ est la pseudo-métrique définie pour toute mesure de probabilité μ sur $([0,1]^d, \mathcal{B}([0,1]^d))$ et tous A et B dans $\mathcal{A}$ par $\rho_\mu(A, B) = \sqrt{\mu(A \Delta B)}$. En particulier, la condition (17) est satisfaite par la classe des pavés $\mathcal{Q}_d$ et plus généralement par les classes de Vapnik-Chervonenkis (voir [**148**] pour une définition). Dans mon article [**61**] en collaboration avec L. Ouchti, nous avons également obtenu le résultat suivant.

Théorème 18 (El Machkouri, Ouchti, 2006). *Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ stationnaire de type AM tel que $\sup_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left[X_k^2 \mid \sigma\left(X_j; j <_{\text{lex}} k\right)\right] \leqslant M$ p.s. pour un certain $M > 0$ et si $\mathcal{A}$ est une classe de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ vérifiant la condition $(\mathbb{H})$ alors le principe d'invariance a lieu.*

En comparant les théorèmes 17 et 18, on observe que le contrôle des variances conditionnelles est essentiel pour la validité du TLCF pour les champs de type AM de carrés intégrables. Enfin, d'après le théorème 15, il n'est pas non plus possible de remplacer purement et simplement la condition $(\mathbb{H})$ par la condition (H) dans le théorème 18. Pour obtenir un TLCF pour des champs de variables aléatoires non bornées et pour de larges classes de boréliens ne satisfaisant pas nécessairement la condition $(\mathbb{H})$, j'ai établi au préalable de nouvelles inégalités de moments que je présente dans le paragraphe suivant.

2. Inégalités de Kahane-Khintchine et principe d'invariance

On dit qu'une fonction ψ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est une fonction de Young si ψ est convexe, croissante et telle que $\psi(0) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty}\psi(t) = +\infty$. L'espace de Orlicz $\mathbb{L}_\psi(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ associé à la fonction de Young ψ est l'espace des variables aléatoires Z définies sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[\psi(\theta|Z|)] < \infty$ pour un certain $\theta > 0$. On munit l'espace de Orlicz $\mathbb{L}_\psi(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ d'une structure d'espace de Banach grâce à la norme de Luxemburg définie pour toute variable aléatoire Z dans $\mathbb{L}_\psi(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ par

$$\|Z\|_\psi = \inf\left\{c > 0\,;\, \mathbb{E}\left[\psi\left(\frac{|Z|}{c}\right)\right] \leq 1\right\}. \tag{18}$$

Notons que si $\psi(x) = x^p$ pour tout x réel avec $p \geqslant 1$ alors $\mathbb{L}_\psi(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = \mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ et $\|Z\|_\psi = \|Z\|_p = (\mathbb{E}[|Z|^p])^{1/p}$ pour toute variable aléatoire Z dans $\mathbb{L}_p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Une autre classe importante de fonctions de Young est la classe des fonctions de Young de type exponentielles. Soit $\beta > 0$ un réel. On note ψ_β la fonction de Young définie pour tout x dans $\mathbb{R}_+$ par

$$\psi_\beta(x) = \exp((x+h_\beta)^\beta) - \exp(h_\beta^\beta) \tag{19}$$

où h_β est le réel défini par l'égalité $h_\beta = ((1-\beta)/\beta)^{1/\beta}\,\mathbb{1}_{\{0<\beta<1\}}$. L'expression de la fonction ψ_β pour β compris entre 0 et 1 vient du fait que la fonction $x \mapsto \exp(x^\beta) - 1$ n'est pas convexe sur l'intervalle $[0,h_\beta]$. Pour plus de détails sur la théorie des fonctions de Young et des espaces de Orlicz, le lecteur pourra se référer au livre de Krasnosel'skii et Rutickii [**102**].

Dans mon article[**52**], j'ai obtenu de nouvelles inégalités de type Kahane-Khintchine pour des champs de variables aléatoires dépendantes ayant des moments exponentiels finis qui généralisent celles établies par Kahane [**97**] et Peskir [**130**] pour des suites de variables aléatoires indépendantes et bornées. Pour tout réel $0 < q < 2$, on définit $\beta(q) = 2q/(2-q)$ et par convention, on pose $1/\beta(2) = 0$. On considère également les tribus

$$\mathcal{F}_{i,k} = \sigma\left(X_j\,;\, j <_{\text{lex}} i \text{ et } |j| \geqslant |k-i|\right)$$

pour tous i et k dans $\mathbb{Z}^d$.

Théorème 19 (El Machkouri, 2002). *Si $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de variables aléatoires réelles de moyennes nulles et s'il existe $0 < q < 2$ tel que $X_i \in \mathbb{L}_{\psi_{\beta(q)}}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ pour tout i dans $\mathbb{Z}^d$ alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de q telle que pour toute partie finie Γ de $\mathbb{Z}^d$,*

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right\|_{\psi_q} \leq C\left(\sum_{i\in\Gamma}\|X_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}} + \sum_{i\in\Gamma}\sum_{k<_{\text{lex}} i}\left\|\sqrt{|X_k\mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_{i,k}]|}\right\|^2_{\psi_{\beta(q)}}\right)^{1/2}.$$

Si $X_i \in \mathbb{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute partie finie Γ de $\mathbb{Z}^d$,

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right\|_{\psi_2} \leq C\left(\sum_{i\in\Gamma}\|X_i\|^2_\infty + \sum_{i\in\Gamma}\sum_{k<_{\text{lex}} i}\|X_k\mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_{i,k}]\|_\infty\right)^{1/2}.$$

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de type AM tel que $\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{E}\left[\exp\left(|X_i|\right)\right]\leqslant\kappa$ avec $\kappa>0$ (autrement dit $\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\|X_i\|_{\psi_1}\leqslant 1\vee\log_2(\kappa)$) et si Γ est une partie finie de $\mathbb{Z}^d$ alors en appliquant le théorème 19 avec $q=2/3$, on peut vérifier qu'il existe $c>0$ telle que

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i\in\Gamma}X_i\right|>|\Gamma|\right)=O\left(\exp\left(-c|\Gamma|^{1/3}\right)\right). \tag{20}$$

La formule (20) est une extension aux champs aléatoires de type AM d'un résultat obtenu par Lesigne et Volný [**107**] dans lequel les auteurs ont démontré que l'exposant 1/3 est optimal. En combinant le théorème 19 avec des inégalités de mélange dues à Serfling [**141**] (voir aussi [**116**]), on obtient également des inégalités de moments pour les champs aléatoires ϕ-mélangeants. Rappelons que pour mesurer la dépendance entre deux sous-tribus $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de $\mathcal{F}$, il existe dans la littérature plusieurs cœfficients dits de mélange (voir par exemple [**44**] ou [**47**]). Nous rappelons ici les définitions du ϕ-mélange introduit par Ibragimov [**91**] et du α-mélange introduit par Rosenblatt [**136**] :

$$\begin{aligned}\phi\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)&=\sup\left\{\left|\mathbb{P}\left(V\mid U\right)-\mathbb{P}\left(V\right)\right|\ ;\ U\in\mathcal{U},\ \mathbb{P}\left(U\right)>0,\ V\in\mathcal{V}\right\}\\ \alpha\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)&=\sup\left\{\left|\mathbb{P}\left(V\cap U\right)-\mathbb{P}\left(V\right)\mathbb{P}(U)\right|\ ;\ U\in\mathcal{U},\ V\in\mathcal{V}\right\}.\end{aligned}$$

On associe au champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ les cœfficients définis pour tout triplet (k,ℓ,n) dans $(\mathbb{N}^*\cup\{\infty\})^2\times\mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned}\phi_{k,\ell}(n)&=\sup\left\{\phi\left(\mathcal{F}_{\Gamma_1},\mathcal{F}_{\Gamma_2}\right),\ |\Gamma_1|\leq k,\ |\Gamma_2|\leq\ell,\ \Xi(\Gamma_1,\Gamma_2)\geq n\right\},\\ \alpha_{k,\ell}(n)&=\sup\left\{\alpha\left(\mathcal{F}_{\Gamma_1},\mathcal{F}_{\Gamma_2}\right),\ |\Gamma_1|\leq k,\ |\Gamma_2|\leq\ell,\ \Xi(\Gamma_1,\Gamma_2)\geq n\right\}\end{aligned}$$

où, pour toute partie Γ de $\mathbb{Z}^d$, $\mathcal{F}_\Gamma$ est la tribu engendrée par les variables X_i pour i dans Γ et $|\Gamma|$ désigne le cardinal de Γ. Par ailleurs, Ξ est la distance définie pour toutes parties Γ_1 et Γ_2 de $\mathbb{Z}^d$ par

$$\Xi(\Gamma_1,\Gamma_2)=\min\{|i-j|;\ i\in\Gamma_1\text{ et } j\in\Gamma_2\}\quad\text{ et }\quad|i-j|=\max_{1\leq k\leq d}|i_k-j_k|.$$

DÉFINITION 6. *On dit que* $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *est* ϕ*-mélangeant ou* α*-mélangeant s'il existe* (k,ℓ) *dans* $(\mathbb{N}^*\cup\{\infty\})^2$ *tel que* $\lim_{n\to\infty}\phi_{k,\ell}(n)=0$ *ou* $\lim_{n\to\infty}\alpha_{k,\ell}(n)=0$ *respectivement. On dit également d'un champ* α*-mélangeant qu'il est fortement mélangeant.*

D'autre part, on a $2\alpha\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)\leqslant\phi\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$. Ainsi, tout champ ϕ-mélangeant est α-mélangeant (voir [**47**] pour plus de détails sur les coefficients de mélange).

COROLLAIRE 1 (EL MACHKOURI, 2002). *Considérons un champ* $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ *de variables aléatoires réelles de moyennes nulles. S'il existe un réel* $0<q<2$ *tel que pour tout i dans* $\mathbb{Z}^d$*, la variable aléatoire* X_i *appartienne à* $\mathbb{L}_{\psi_{\beta(q)}}\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ *alors il existe une constante* $C>0$ *qui ne dépend que de q telle que pour toute partie finie* Γ *de* $\mathbb{Z}^d$*,*

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma}X_i\right\|_{\psi_q}\leq C\left(\sum_{i\in\Gamma}\|X_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}}+\sum_{i\in\Gamma}\|X_i\|_{\psi_{\beta(q)}}\sum_{k<_{\text{lex}}i}\|X_k\|_{\psi_{\beta(q)}}\sqrt{\phi_{\infty,1}(|k-i|)}\right)^{1/2}$$

Si $X_i\in\mathbb{L}^\infty\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ *alors il existe une constante* $C>0$ *telle que pour toute partie finie* Γ *de* $\mathbb{Z}^d$*,*

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma}X_i\right\|_{\psi_2}\leq C\left(\sum_{i\in\Gamma}\|X_i\|^2_\infty+\sum_{i\in\Gamma}\|X_i\|_\infty\sum_{k<_{\text{lex}}i}\|X_k\|_\infty\phi_{\infty,1}\left(|k-i|\right)\right)^{1/2}.$$

Les inégalités obtenues ci-dessus permettent via un argument de chaînage classique de démontrer la relative compacité en loi du processus $\{n^{-d/2}\nu_n(A)\,;\,A\in\mathcal{A}\}$ issu d'un champ stationnaire de variables aléatoires ayant des moments exponentiels finis. Ainsi, dans mon article [**52**], j'ai obtenu l'extension suivante du théorème 16 pour des champs de variables aléatoires ayant seulement des moments exponentiels finis.

Théorème 20 (El Machkouri, 2002). *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires réelles, identiquement distribuées et de moyennes nulles. S'il existe deux réels $0<q<2$ et $\theta>0$ tels que*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta|X_0|^{\beta(q)}\right)\right]<\infty\quad et\quad \sum_{k<_{\mathrm{lex}}0}\left\|\sqrt{|X_k\mathbb{E}\left[X_0\,|\,\mathcal{F}_k\right]|}\right\|^2_{\psi_{\beta(q)}}<\infty$$

où $\beta(q)=2q/(2-q)$ et si $\mathcal{A}$ une collection de boréliens de $[0,1]^d$ telle que

$$\int_0^1 (H(\mathcal{A},\rho,\varepsilon))^{1/q}\,d\varepsilon<\infty \tag{21}$$

alors le principe d'invariance a lieu.

Dans le théorème 20, il est important de souligner que l'on contrôle la taille de la classe $\mathcal{A}$ par la notion d'entropie métrique sans inclusion. D'autre part, on peut remarquer que le théorème 16 peut être vu comme le « cas limite » du théorème 20 lorsque q tend vers 2. Enfin, nous démontrons également le corollaire suivant pour les champs aléatoires ϕ-mélangeants.

Corollaire 2 (El Machkouri, 2002). *Le théorème 20 reste valide si on remplace la condition*

$$\sum_{k<_{\mathrm{lex}}0}\left\|\sqrt{|X_k\mathbb{E}\left[X_0|\,\mathcal{F}_k\right]|}\right\|^2_{\psi_{\beta(q)}}<\infty\quad par\ la\ condition\quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sqrt{\phi_{\infty,1}(|k|)}<\infty.$$

En pratique, il n'est pas toujours aisé de calculer les coefficients de mélange associés à un champ aléatoire donné. Plus gênant encore, il existe des processus autorégressifs très simples qui ne sont pas fortement mélangeant au sens de Rosenblatt [**136**] (voir Andrews [**3**]). Pour contourner ces difficultés, plusieurs autres notions de dépendances ont étés introduites dans la littérature (voir par exemple [**44**], [**48**] ou [**159**]). Dans la section suivante, nous nous intéressons aux coefficients de mesure de dépendance physique introduits par Wu [**159**].

3. Un théorème limite central pour des champs de Bernoulli

Il existe une littérature assez abondante dorénavant sur le TLC pour les champs aléatoires sous diverses conditions de dépendance. Par exemple, on peut citer (sans être exhaustif) les contributions [**14**], [**19**], [**21**], [**22**], [**33**], [**41**], [**78**], [**87**], [**95**], [**114**], [**123**], [**124**], [**125**], [**127**], [**129**] et [**150**]. Dans mon article [**66**] en collaboration avec D. Volný et W. B. Wu, nous démontrons un TLC pour une classe de champs aléatoires qui peuvent s'écrire comme une fonctionnelle non nécessairement linéaire de variables aléatoires iid. Plus précisemment, on suppose que $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ aléatoire tel que pour tout i dans $\mathbb{Z}^d$,

$$X_i=g\left(\varepsilon_{i-s}\,;\ s\in\mathbb{Z}^d\right) \tag{22}$$

où $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ sont des variables aléatoires iid et $g\ :\ \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction mesurable. Il s'agit d'établir la normalité asymptotique de $S_\Gamma=\sum_{i\in\Gamma}X_i$ où Γ est une partie finie de $\mathbb{Z}^d$ dont le cardinal tend vers l'infini. La preuve de notre résultat est basée sur un TLC pour des champs

m_n-dependants établi par Heinrich [**87**]. Pour $d = 1$, le modèle (22) est bien connu et englobe un grand nombre de modèles linéaires et non linéaires pour les séries temporelles. Comme dans [**159**], nous définissons les coefficients de mesure de dépendance physique de la manière suivante : soit $(\varepsilon_i^{'})_{i\in\mathbb{Z}^d}$ une copie iid du champ $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$, pour tout i dans $\mathbb{Z}^d$, on pose

$$X_i^* = g\left(\varepsilon_{i-s}^* \,;\; s\in\mathbb{Z}^d\right) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_i^* = \varepsilon_i\, 1\!\!1_{\{i\neq 0\}} + \varepsilon_0^{'}\, 1\!\!1_{\{i=0\}}.$$

On peut remarquer que X_i^* s'obtient à partir de X_i en remplaçant ε_0 par sa copie $\varepsilon_0^{'}$.

Définition 7. *Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de Young et soit i dans $\mathbb{Z}^d$. Si $X_i \in \mathbb{L}_\psi(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ alors on définit le coefficient de mesure de dépendance physique $\delta_{i,\psi}$ par l'égalité $\delta_{i,\psi} = \left\|X_i - X_i^*\right\|_\psi$ où $\|\,.\,\|_\psi$ est définie par* (18).

Si $p > 0$ et $X_i \in \mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ alors $\delta_{i,p} = \left\|X_i - X_i^*\right\|_p$. Par exemple, si $\varepsilon_i \in \mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ pour tout i dans $\mathbb{Z}^d$ avec $p \geqslant 2$ et si $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ sont des nombres réels tels que $\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} a_i^2 < \infty$ alors le champ aléatoire linéaire $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ défini pour tout i dans $\mathbb{Z}^d$ par

$$X_i = \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} a_s \varepsilon_{i-s}$$

est de la forme (22) avec g linéaire. De plus, on obtient immédiatement $\delta_{i,p} = |a_i|\left\|\varepsilon_0 - \varepsilon_0^{'}\right\|_p$. Pour un exemple de champ non linéaire de la forme (22), on peut considérer un champ de Volterra (voir [**28**] and [**139**]) défini pour tout i dans $\mathbb{Z}^d$ par la relation

$$X_i = \sum_{s_1,s_2\in\mathbb{Z}^d} a_{s_1,s_2}\varepsilon_{i-s_1}\varepsilon_{i-s_2}$$

où les coefficients réels a_{s_1,s_2} vérifient $a_{s_1,s_2} = 0$ si $s_1 = s_2$. Dans ce cas, si on pose

$$A_i = \sum_{s_1,s_2\in\mathbb{Z}^d}\left(a_{s_1,i}^2 + a_{i,s_2}^2\right) \quad \text{et} \quad B_i = \sum_{s_1,s_2\in\mathbb{Z}^d}\left(|a_{s_1,i}|^p + |a_{i,s_2}|^p\right)$$

alors en appliquant l'inégalité de Rosenthal (voir [**83**]), il existe une constante $\kappa_p > 0$ telle que

$$\delta_{i,p} \leqslant \kappa_p\left(\|\varepsilon_0\|_2\,\|\varepsilon_0\|_p\sqrt{A_i} + \|\varepsilon_0\|_p^2\, B_i^{1/p}\right).$$

Les coefficients de mesure de dépendance physique permettent d'établir l'inégalité de moments suivante.

Proposition 1 (El Machkouri, Volný, Wu, 2013). *Soit Γ une partie finie de $\mathbb{Z}^d$ et soit $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ une famille de nombres réels. Alors, pour tout $p \geqslant 2$,*

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} a_i X_i\right\|_p \leqslant \left(2p\sum_{i\in\Gamma} a_i^2\right)^{1/2} \Delta_p$$

avec $\Delta_p = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\delta_{i,p}$.

Soit X et Y deux variables aléatoire réelles de fonctions de répartition F_X et F_Y respectivement. On appelle distance de Lévy entre X et Y, le nombre

$$d_{\mathrm{L}}(X,Y) := \inf\left\{\varepsilon > 0\,;\, F_X(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant F_Y(x) \leqslant F_X(x+\varepsilon) + \varepsilon \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}\right\}$$

Le résultat principal obtenu dans [**66**] est le TLC suivant.

Théorème 21 (El Machkouri, Volný, Wu, 2013). *Soit* $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ *un champ aléatoire stationnaire centré de la forme* (22) *tel que* $\sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\delta_i<\infty$. *Soit* $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de parties finies de* $\mathbb{Z}^d$ *telle que* $|\Gamma_n|\longrightarrow\infty$. *Si* $\sigma_n^2:=\mathbb{E}\left[S_{\Gamma_n}^2\right]\longrightarrow\infty$ *alors*

$$d_L\left(\frac{S_{\Gamma_n}}{\sqrt{|\Gamma_n|}},\mathcal{N}\left(0,\frac{\sigma_n^2}{|\Gamma_n|}\right)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

où d_L *désigne la distance de Lévy.*

L'idée de la preuve du théorème 21 repose essentiellement sur l'approximation des sommes partielles S_Γ du champ aléatoire $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ par les sommes partielles d'un champ aléatoire m_n-dépendant pour lequel le TLC a lieu (voir [**87**]). Enfin, on montre également dans [**66**] que le principe d'invariance a lieu pour de large classes de boréliens.

Théorème 22 (El Machkouri, Volný, Wu, 2013). *Soit* $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ *un champ stationnaire centré de la forme* (22) *et soit* $\mathcal{A}$ *une classe de boréliens de* $[0,1]^d$. *Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(*i*) $\mathcal{A}$ *est une classe de Vapnik-Chervonenkis de dimension* V *et il existe* $p>2(V-1)$ *tel que* $X_0\in\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *et* $\sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\delta_{i,p}<\infty$.

(*ii*) *Il existe* $\theta>0$ *et* $0<q<2$ *tels que* $\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta|X_0|^{\beta(q)}\right)\right]<\infty$ *avec* $\beta(q)=2q/(2-q)$ *et* $\sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\delta_{i,\psi_{\beta(q)}}<\infty$ *et*

$$\int_0^1(H(\mathcal{A},\rho,\varepsilon))^{1/q}\,d\varepsilon<\infty.$$

(*iii*) $X_0\in\mathbb{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, *la classe* $\mathcal{A}$ *satisfait la condition* (H) *et* $\sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\delta_{i,\infty}<\infty$.

Alors le principe d'invariance a lieu.

Lorsque le champ aléatoire considéré n'est pas nécessairement de la forme (22), il peut être judicieux d'opter pour une approche « à la Gordin ». Dans mon article [**60**] en collaboration avec D. Giraudo, nous avons proposé une extension de la méthode de Gordin (voir [**74**], [**83**] and [**149**]) aux champs aléatoires stationnaires. Nous présentons notre résultat principal dans la section suivante.

4. Décomposition « à la Gordin » pour les champs aléatoires

Un moyen puissant pour établir des théorèmes limite pour les sommes partielles issues de suites stationnaires de variables aléatoires réelles est d'approximer ces sommes partielles par des martingales. Cette idée est due à Gordin [**74**]. En particulier, cette méthode est très puissante pour étudier le TLC et le TLCF pour des suites de variables aléatoires dépendantes satisfaisant une condition de nature projective (voir condition (23) ci-dessous). Plus précisemment, soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. Supposons que $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et notons ν sa loi de probabilité. Soit $f:\mathbb{R}^\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(\omega)=\omega_0$ et $T:\mathbb{R}^\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}^\mathbb{Z}$ par $(T\omega)_k=\omega_{k+1}$ pour tout ω dans $\mathbb{R}^\mathbb{Z}$ et tout k dans $\mathbb{Z}$. Ainsi, $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie sur l'espace probabilisé $(\mathbb{R}^\mathbb{Z},\mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathbb{Z}),\nu)$ est stationnaire et de loi ν. Par conséquent, sans perte de généralité, on peut supposer que $X_k=f\circ T^k$ pour tout k dans $\mathbb{Z}$. Pour tout $p\geqslant 1$ et toute tribu $\mathcal{M}\subset\mathcal{F}$, on rappelle que $\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)\ominus\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ est l'espace de toutes les variables aléatoires Z dans $\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ telles que $\mathbb{E}[Z\mid\mathcal{M}]=0$ p.s.

Théorème 23 (Gordin, 1969). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé et soit $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ une fonction mesurable telle que $\mu = T\mu$. Soit $p \geqslant 1$ et $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ une tribu telle que $\mathcal{M} \subset T^{-1}\mathcal{M}$. Si $f \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \ominus \mathbb{L}^p\left(\Omega, \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} T^{-i}\mathcal{M}, \mu\right)$ et

$$\sum_{k\geqslant 0} \left\| \mathbb{E}\left[f \mid T^k\mathcal{M}\right] \right\|_p < \infty \tag{23}$$

alors il existe $m \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \ominus \mathbb{L}^p(\Omega, T\mathcal{M}, \mu)$ et $g \in \mathbb{L}^p(\Omega, T\mathcal{M}, \mu)$ telles que

$$f = m + g - g\circ T. \tag{24}$$

Le terme $g - g\circ T$ dans (24) est appelé *cobord* et l'équation (24) est appelée décomposition *martingale-cobord* de f. De plus, $(m\circ T^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements de martingale par rapport à la filtration croissante $(T^{-i}\mathcal{M})_{i\in\mathbb{Z}}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n(f) = S_n(m) + g - g\circ T^n \tag{25}$$

où $S_n(h) = \sum_{i=0}^{n-1} h\circ T^i$ pour toute fonction $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. En combinant (25) avec le TLC de Billingsley-Ibragimov pour les martingales (voir [**11**] et [**92**]), on obtient le TLC pour la suite stationnaire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ lorsque la condition (23) est valide. De même, en combinant (25) avec le TLCF pour les martingales (voir [**12**]), on obtient le TLCF pour la suite stationnaire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Ainsi, la méthode de Gordin fournit une condition suffisante pour établir des théorèmes limite pour les suites stationnaires lorsqu'un tel théorème limite est valide pour les martingales. Dans mon article [**60**] en collaboration avec D. Giraudo, nous avons proposé une extension de la méthode de Gordin aux champs aléatoires stationnaires. Rappelons qu'il existe plusieurs manières de définir un champ d'accroissements d'une martingale. Les définitions 4 et 5 donnent deux exemples possibles. Néanmoins, le « bon cadre » pour établir une généralisation du théorème 23 aux champs aléatoires stationnaires est celui des orthomartingales de Cairoli [**23**]. Une bonne introduction à ce concept est le livre de Khoshnevisan [**99**]. Dans la suite, on note $\langle d\rangle$ l'ensemble $\{1, ..., d\}$. Pour tout $s = (s_1, \dots, s_d)$ et tout $t = (t_1, \dots, t_d)$ dans $\mathbb{Z}^d$, on écrit $s \preccurlyeq t$ (resp. $s \prec t$, $s \succcurlyeq t$ et $s \succ t$) si et seulement si $s_k \leqslant t_k$ (resp. $s_k < t_k$, $s_k \geqslant t_k$ et $s_k > t_k$) pour tout k dans $\langle d\rangle$ et on note également $s \wedge t = (s_1 \wedge t_1, \dots, s_d \wedge t_d)$.

Définition 8. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé. Une famille $(\mathcal{G}_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ est une filtration commutante si $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}$ pour tout i et j dans $\mathbb{Z}^d$ tels que $i \preccurlyeq j$ et*

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Z \mid \mathcal{G}_s\right] \mid \mathcal{G}_t\right] = \mathbb{E}\left[Z \mid \mathcal{G}_{s\wedge t}\right] \quad p.s.$$

pour tout s et t dans $\mathbb{Z}^d$ et toute variable aléatoire Z dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

La définition 8 est également connue dans la littérature sous le nom de « condition F4 ».

Définition 9. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé. Un champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de différences d'orthomartigales (DOM) s'il existe une filtration commutante $(\mathcal{G}_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ telle que $X_k \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{G}_k, \mu) \ominus \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{G}_\ell, \mu)$ pour tous k et ℓ dans $\mathbb{Z}^d$ tels que $\ell \not\succcurlyeq k$.*

Soit $k \in \mathbb{Z}^d$. Si $S_k = \sum_{0\prec i\preccurlyeq k} X_i$ où $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ DOM par rapport à la filtration commutante $(\mathcal{G}_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ alors $S_k \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{G}_k, \mu)$ et $\mathbb{E}\left[S_k \mid \mathcal{G}_\ell\right] = S_\ell$ pour tout $\ell \preccurlyeq k$. On dit alors que $(S_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ d'orthomartingales (OM).

Comme pour les suites stationnaires réelles, sans perte de généralité, un champ aléatoire réel stationnaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ peut s'écrire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ où $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable et pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $T^k : \Omega \longrightarrow \Omega$ est un opérateur qui préserve la mesure et qui vérifie $T^i\circ T^j = T^{i+j}$ pour tous i et j dans $\mathbb{Z}^d$. Pour tout s dans $\langle d\rangle$, on pose $T_s = T^{e_s}$ où $e_s = (e_s^{(1)}, \dots, e_s^{(d)})$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}^d$ tel que $e_s^{(s)} = 1$ et $e_s^{(i)} = 0$ pour tout i dans $\langle d\rangle\setminus\{s\}$ et U_s est l'opérateur défini par $U_s h = h\circ T_s$ pour toute fonction $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit également U_J comme étant l'opérateur produit $\Pi_{s\in J} U_s$ pour tout $\emptyset \subsetneq J \subset \langle d\rangle$ et on écrit simplement U pour $U_{\langle d\rangle} = U_1\circ U_2\circ\dots\circ U_d$. Enfin, pour tout $\emptyset \subsetneq J \subset \langle d\rangle$, on rappelle que $|J|$ désigne le nombre d'éléments de J et que J^c est l'ensemble $\langle d\rangle\setminus J$. Le résultat suivant est démontré dans [**60**].

Théorème 24 (El Machkouri, Giraudo, 2016). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé et soit $T^\ell : \Omega \longrightarrow \Omega$ un opérateur qui préserve la mesure pour tout ℓ dans $\mathbb{Z}^d$ de sorte que $T^i\circ T^j = T^{i+j}$ pour tous i et j dans $\mathbb{Z}^d$. Soit $p \geqslant 1$ et soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ une tribu telle que $(T^{-i}\mathcal{M})_{i\in\mathbb{Z}^d}$ soit une filtration commutante. Si $f \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \ominus \mathbb{L}^p\left(\Omega, \bigcap_{k\in\mathbb{N}^d} T^k\mathcal{M}, \mu\right)$ et*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^d} \left\| \mathbb{E}\left[f \mid T^k\mathcal{M}\right] \right\|_p < \infty \tag{26}$$

alors f admet la décomposition

$$f = m + \sum_{\emptyset\subsetneq J\subsetneq\langle d\rangle} \prod_{s\in J}(I - U_s)m_J + \prod_{s=1}^{d}(I - U_s)g, \tag{27}$$

où m, g et m_J appartiennent à $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, $\mathbb{L}^p\left(\Omega, \prod_{s=1}^d T_s\mathcal{M}, \mu\right)$ et $\mathbb{L}^p\left(\Omega, \prod_{s\in J} T_s\mathcal{M}, \mu\right)$ respectivement et $(U^i m)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ et $\left(U_{J^c}^i m_J\right)_{i\in\mathbb{Z}^{d-|J|}}$ sont des champs DOM pour $\emptyset \subsetneq J \subsetneq \langle d\rangle$.

La formule (27) s'appelle la décomposition *orthomartingale-cobord* de f. On peut remarquer que la condition (26) coïncide avec la condition (23) et que la décomposition (27) coïncide avec la décomposition (24) lorsque $d = 1$. Ainsi, le théorème 24 est une extension aux champs aléatoires du théorème 23. D'autre part, il est bien connu que la condition (23) de Gordin n'est pas une condition nécessaire pour obtenir la décomposition (24). Pour une condition nécessaire et suffisante, le lecteur peut se référer à la proposition 4.1 dans [**32**] que Giraudo [**71**] a étendu au cas des champs aléatoires généralisant ainsi le théorème 24 en donnant une condition nécessaire et suffisante de la décomposition orthomartingale-cobord (27) (voir aussi [**151**]).

Récemment, Volný a démontré que le théorème limite central et le principe d'invariance sont valides pour les champs DOM (voir [**150**] et [**152**]). Par conséquent, la décomposition (27) permet d'obtenir le TLC et le TLCF pour le champ aléatoire stationnaire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ satisfisant (27). Pour d'autres résultats sur les méthodes d'approximations de champs aléatoires par des orthomartingales, le lecteur peut par exemple se référer aux articles [**36**], [**76**], [**128**] et [**153**].

Chapitre 3

Estimation non paramétrique en statistique spatiale

Dans des domaines tels la géologie, l'économétrie, l'épidémiologie, le traitement d'image et de nombreux autres, les praticiens travaillent souvent avec des données collectées sur des sites géographiques (données spatiales). Une question fondamentale en statistique est l'estimation de la densité de probabilité de la loi sous-jacente dont ces observations sont issues. On s'intéresse ici à la normalité asymptotique d'estimateurs non paramétriques classiques de la densité et de la régression pour des champs aléatoires réels dépendants (données spatiales). Pour les séries temporelles, il existe d'innombrables articles sur le sujet tandis que la littérature est beaucoup plus limitée pour les données spatiales. D'autre part, la plupart des résultats sur la normalité asymptotique de ces estimateurs dans le cas spatial sont basés sur la méthode des blocs de Bernstein dont le principe de base est de décomposer des sommes partielles de tableaux de champs aléatoires en « blocs » et d'utiliser des lemmes de couplage pour se ramener aux cas des variables aléatoires indépendantes. La motivation principale de mes travaux présentés dans ce chapitre (voir [**53**], [**55**], [**56**], [**57**], [**58**], [**63**]) est de mettre en évidence que la méthode de Lindeberg [**108**] permet d'améliorer considérablement certains théorèmes limite centraux en statistique spatiale en terme de conditions de dépendance et de calibrage du paramètre de fenêtre de l'estimateur considéré. En particulier, dans les résultats présentés ici, nous insisterons sur le fait que les hypothèses sur le paramètre de fenêtre sont exactement les mêmes que dans le cas indépendant.

1. Estimation d'une densité de probabilité

1.1. Estimateur à noyau de Parzen-Rosenblatt. L'estimateur à noyau introduit par Rosenblatt [**137**] et Parzen [**126**] a reçu une attention considérable en estimation non paramétrique d'une densité de probabilité pour les séries temporelles et reste encore de nos jours un estimateur très populaire. Soient $n \geqslant 1$ un entier et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles identiquement distribuées. Supposons que f soit la densité de X_1 alors l'estimateur à noyau de Parzen-Rosenblatt est défini pour tout x dans $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{K}\left(\frac{x - X_i}{b_n}\right) \tag{28}$$

où K est un noyau de probabilité (i.e. $\mathrm{K} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{K}(t)dt = 1$) et b_n est une constante strictement positive qui converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Le paramètre b_n s'appelle le paramètre de fenêtre et son calibrage est crucial en pratique pour assurer la convergence de l'estimateur en terme d'erreur quadratique moyenne. Lorsque les observations $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, les propriétés asymptotiques de f_n ont fait l'objet de très nombreux travaux (voir [**142**]). En particulier, Parzen [**126**]a montré que si $X_1, \ldots, X_n$ sont iid et si b_n converge vers 0 de sorte que nb_n tend vers l'infini (conditions dites « minimales » sur le paramètre b_n) alors $(nb_n)^{1/2}(f_n(x_0) - \mathbb{E}[f_n(x_0)])$ converge en loi vers une gaussienne de moyenne nulle et de variance $f(x_0)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{K}^2(t)dt$ pour tout x_0 dans $\mathbb{R}$. Sous les mêmes hypothèses minimales sur le paramètre b_n, ce résultat a été étendu par Wu [**160**] à des processus linéaires avec des innovations iid et par Dedecker et Merlevède [**43**] pour des suites fortement mélangeantes. Dans mon article [**55**], j'ai généralisé le résultat de Parzen [**126**] aux champs de variables aléatoires fortement mélangeants. Soit $d \geqslant 1$ un entier naturel et soit $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires réelles identiquement distribuées et notons f la densité de probabilité (inconnue) de la loi de X_0 par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $n \geqslant 1$ fixé et soit Λ_n une partie finie de $\mathbb{Z}^d$. Sur la base des observations $(X_i)_{i\in\Lambda_n}$, on définit (la version spatiale de) l'estimateur de Parzen-Rosenblatt pour tout x dans $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{|\Lambda_n|b_n}\sum_{i\in\Lambda_n}\mathrm{K}\left(\frac{x - X_i}{b_n}\right) \tag{29}$$

où $|\Gamma|$ désigne le nombre d'éléments de toute partie finie Γ de $\mathbb{Z}^d$. On considère les hypothèses suivantes :

(A1) f est continue sur $\mathbb{R}$,
(A2) K est à support compact et vérifie $\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{K}(t)|dt < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{K}^2(t)dt < \infty$,
(A3) Pour tout k dans $\mathbb{Z}^d$, la loi de (X_0, X_k) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et sa densité de probabilité est continue.

Le résultat suivant est démontré dans [**55**].

THÉORÈME 25 (EL MACHKOURI, 2011). *Supposons que (A1), (A2) et (A3) soient vraies. Si $b_n \longrightarrow 0$ de sorte que $|\Lambda_n|b_n \longrightarrow \infty$ et si*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{2d-1}\alpha_{1,\infty}(m) < \infty$$

alors pour tout $\ell > 0$ et tous $x_1, \dots, x_\ell$ dans $\mathbb{R}$,

$$(|\Lambda_n|b_n)^{1/2}\begin{pmatrix} f_n(x_1) - \mathbb{E}[f_n(x_1)] \\ \vdots \\ f_n(x_\ell) - \mathbb{E}[f_n(x_\ell)] \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \mathcal{N}(0, V)$$

où V est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $f(x_i)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{K}^2(t)dt$ pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

On notera que ce résultat est publié dans [**55**] dans le cas particulier où $\Lambda_n = \{1, \dots, n\}^d$. Cependant, une lecture attentive de la preuve permet de voir que la version plus générale énoncée dans le théorème 25 reste vraie. Le théorème 25 peut être également vu comme une extension du théorème 3.1 de Bosq et al. [**18**] dans lequel des conditions plus restrictives sont exigées sur le paramètre de fenêtre b_n. Enfin, le théorème 25 généralise également un résultat analogue dû à Tran [**146**] dans lequel les hypothèses sur le paramètre de fenêtre et les coefficients de mélange fort sont imbriquées de manière complexe.

En pratique, il est parfois difficile de calculer explicitement les coefficients de mélange fort. De plus, il existe des processus linéaires très simples qui ne sont pas fortement mélangeant (voir

[**3**]). Il est par conséquent intéressant d'établir des versions du théorème 25 pour des champs qui ne sont pas nécessairement fortement mélangeants. Une approche séduisante par sa simplicité et son utilité pratique est la notion de mesure de dépendance physique introduite par Wu [**159**] pour les champs aléatoires de Bernoulli (voir (22) et définition 7 au chapitre 3). Dans mon article [**57**], j'ai établi la normalité asymptotique de l'estimateur de Parzen-Rosenblatt pour la classe des champs aléatoires de Bernoulli. Considérons les hypothèses suivantes :

(B1) f est continue et bornée,
(B2) K est lipschitzien et vérifie $\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{K}(t)|dt < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{K}^2(t)dt < \infty$,
(B3) Il existe $\kappa > 0$ tel que $f_{0,i}(x,y) \leqslant \kappa$ pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ et tout $i \in \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}$ où $f_{0,i}$ est la densité de probabilité jointe de (X_0, X_i).

Théorème 26 (El Machkouri, 2014). *Supposons que (B1), (B2) et (B3) soient vraies. Si $b_n \longrightarrow 0$ et $|\Lambda_n| b_n \longrightarrow \infty$ et si*

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} |i|^{\frac{5d}{2}} \delta_{i,2} < \infty \tag{30}$$

alors la conclusion du théorème 25 reste vraie.

Comme expliqué dans le chapitre 3, le théorème 26 s'applique aux champs aléatoires linéaires de la forme $X_i = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} a_j \varepsilon_j$ avec $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}^d}$ des nombres réels tels que $\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} a_j^2 < \infty$ et $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{Z}^d}$ sont iid, de moyenne nulle et de variance finie. Dans ce cas, on peut vérifier que la condition (30) devient $\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} |i|^{\frac{5d}{2}} |a_i| < \infty$. Cette dernière condition est plus restrictive que la condition obtenue dans le travail de Hallin, Lu et Tran [**84**] pour les champs aléatoires linéaires. Cependant, le théorème 26 s'applique à une classe de champs aléatoires beaucoup plus large et sous des hypothèses « minimales » sur le paramètre de fenêtre b_n. A noter que, toujours dans le cas particulier des champs aléatoires linéaires, Wang et Woodroofe [**154**] ont donné également une condition plus faible que celle du théorème 26 qui assure la normalité asymptotique de l'estimateur de Parzen-Rosenblatt mais pour des innovations ε_i ayant des moments d'ordre strictement plus grand que 2 et sous des hypothèses sur le paramètre de fenêtre plus restrictives.

1.2. Le polygône des fréquences. Le polygône des fréquences est un autre estimateur de la densité qui a l'avantage d'être très simple à calculer puisqu'on l'obtient à partir de l'histogramme en reliant par un segment de droite le milieu du sommet de chacune des tours de ce dernier. Sa simplicité n'est pas le seul atout de cet estimateur puisque Scoot [**140**] a démontré que le polygône des fréquences domine l'histogramme en terme d'erreur quadratique moyenne intégrée (voir également [**6**] et [**27**]). Il semble que dans le cas spatial, les seuls articles consacrés au polygône des fréquences soient ceux de Carbon [**24**] et Carbon et al. [**25**] pour les champs aléatoires fortement mélangeants indexés par $\mathbb{Z}^d$ et celui de Bensaid et Dabo-Niang [**8**] pour les champs aléatoires fortement mélangeants indexés par $\mathbb{R}^d$. Dans [**25**], la normalité asymptotique du polygône des fréquences est démontrée sous des hypothèses entrelacées sur les coefficients de mélange fort et sur le paramètre de fenêtre de l'histogramme associé. Dans mon article [**56**], j'ai obtenu une extension du TLC établi dans [**25**]. Les résultats obtenus sont également valables pour des champs ρ-mélangeants. Rappelons que si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$

sont deux tribus, Kolmogorov et Rozanov [**100**] ont introduit le coefficient de ρ-mélange défini par

$$\rho(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \sup\left\{\frac{|\mathrm{Cov}(f,g)|}{\|f\|_2\,\|g\|_2}\ ;\ f\in\mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{U},\mathbb{P})\ \text{ et }\ g\in\mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{V},\mathbb{P})\right\}.$$

On peut vérifier que $4\alpha(\mathcal{U},\mathcal{V})\leqslant\rho(\mathcal{U},\mathcal{V})$ (voir [**20**]). Pour tout τ dans $\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$ et tout entier $n\geqslant 1$, on pose

$$\rho_{1,\tau}(n) = \sup\left\{\rho\left(\sigma(X_k),\mathcal{F}_B\right)\ ;\ k\in\mathbb{Z}^d,\ |B|\leqslant\tau,\ \Xi(B,\{0\})\geqslant n\right\}$$

où $\mathcal{F}_B=\sigma\left(X_i;\, i\in B\right)$ pour toute partie de $\mathbb{Z}^d$ et Ξ est la distance définie pour toutes parties B_1 et B_2 de $\mathbb{Z}^d$ par $\Xi\left(B_1,B_2\right)=\min\left\{|i-j|\,;\ i\in B_1,\ j\in B_2\right\}$ avec $|i-j|=\max_{1\leq k\leq d}|i_k-j_k|$ pour tout $i=(i_1,\dots,i_d)$ et tout $j=(j_1,\dots,j_d)$ dans $\mathbb{Z}^d$.

DÉFINITION 10. *On dit que le champ aléatoire est ρ-mélangeant s'il existe $\tau\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$ tel que* $\lim_{n\to\infty}\rho_{1,\tau}(n)=0$.

Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini (paramètre de fenêtre). Soit $n\geqslant 1$ un entier et Λ_n une partie finie de $\mathbb{Z}^d$. Soit $(X_i)_{i\in\Lambda_n}$ un champ stationnaire de variables aléatoires réelles et de densité marginale f. On considère la partition $(I_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}$ définie pour tout k dans $\mathbb{Z}$ par $I_{n,k}=[(k-1)b_n,kb_n[$. Soit $k\in\mathbb{Z}$ et soient $\nu_{n,k}$ et $\nu_{n,k+1}$ les nombres d'observations X_i dans les intervalles $I_{n,k}$ et $I_{n,k+1}$ respectivement. Les valeurs de l'histogramme sur $I_{n,k}$ et $I_{n,k+1}$ sont alors respectivement $\nu_{n,k}\left(|\Lambda_n|b_n\right)^{-1}$ et $\nu_{n,k+1}\left(|\Lambda_n|b_n\right)^{-1}$ et le polygône des fréquences $f_{n,k}$ est défini pour tout x dans $J_{n,k}:=[(k-1/2)b_n,(k+1/2)b_n[$ par

$$f_{n,k}(x)=\left(\frac{1}{2}+k-\frac{x}{b_n}\right)\frac{\nu_{n,k}}{|\Lambda_n|b_n}+\left(\frac{1}{2}-k+\frac{x}{b_n}\right)\frac{\nu_{n,k+1}}{|\Lambda_n|b_n}. \tag{31}$$

Si on pose $Y_{i,s}=\mathbb{1}_{X_i\in I_{n,s}}$ pour tout s dans $\mathbb{Z}$ alors

$$f_{n,k}(x)=\frac{1}{|\Lambda_n|b_n}\sum_{i\in\Lambda_n}a_k(x)Y_{i,k}+\overline{a}_k(x)Y_{i,k+1}$$

avec $a_s(u)=1/2+s-u/b_n$ et $\overline{a}_s(u)=a_{-s}(-u)$ pour tout s dans $\mathbb{Z}$ et tout u dans $J_{n,s}$. Finalement, on définit le polygône des fréquences normalisé f_n pour tout x dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x)>0$ par

$$f_n(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{f_{n,k}(x)}{\sigma_{n,k}(x)}\,\mathbb{1}_{J_{n,k}(x)}\quad\text{où}\quad\sigma^2_{n,k}(x)=\left(\frac{1}{2}+2\left(k-\frac{x}{b_n}\right)^2\right)f(x).$$

On considère les hypothèses suivantes :

(C1) f est dérivable et sa dérivée f' est localement bornée.
(C2) $b_n\longrightarrow 0$ et $|\Lambda_n|b_n\longrightarrow\infty$ lorsque $n\longrightarrow\infty$.
(C3) $\sup_{j\neq 0}\mathbb{P}\left(X_0\in I_{n,s}\,,\ X_j\in I_{n,t}\right)=O\left(b_n^2\right)$ pour tout s et t dans $\mathbb{Z}$.
(D3) $\mathbb{P}\left(X_0\in I_{n,s}\,,\ X_j\in I_{n,t}\right)=o(b_n)$ pour tout s, t et j dans $\mathbb{Z}$.

Le théorème suivant est démontré dans [**56**].

THÉORÈME 27 (EL MACHKOURI, 2013). *Supposons (C1) et (C2) et supposons que l'une des hypothèses suivantes soit vraie :*

(i) (C3) est vraie et $\sum_{m\geqslant 1} m^{2d-1}\alpha_{1,\infty}(m) < \infty$,

(ii) (D3) est vraie et $\sum_{m\geqslant 1} m^{d-1}\rho_{1,\infty}(m) < \infty$.

Alors, pour tout entier $\ell \geqslant 1$ *et tous* $x_1, ..., x_\ell$ *dans* $\mathbb{R}$ *tels que* $f(x_i) > 0$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant \ell$, *on a*

$$(|\Lambda_n|b_n)^{1/2}\begin{pmatrix} f_n(x_1) - \mathbb{E}\left[f_n(x_1)\right] \\ \vdots \\ f_n(x_\ell) - \mathbb{E}\left[f_n(x_\ell)\right]\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \mathcal{N}\left(0, \Sigma_\ell\right)$$

où Σ_ℓ *est la matrice unité d'ordre* ℓ.

Le théorème 27 étend le théorème 4.1 de Carbon et al. [**25**] dans trois directions. Tout d'abord, dans le théorème 27, les régions Λ_n sur lesquelles le champ aléatoire est observé sont très générales et en particulier ne sont pas nécessairement rectangulaires, l'hypothèse (C2) sur le paramètre b_n est « minimale » et enfin la condition (i) sur les coefficients de mélange fort est plus faible que celle utilisée dans [**25**] à savoir $\alpha_{1,\infty}(m) = O(m^{-\theta})$ avec $\theta > 2d$.

2. Estimation de la régression par la méthode de Nadaraya-Watson

Dans ce paragraphe, je présente les travaux publiés dans mes articles [**53**] et [**63**] en collaboration avec R. Stoica dans lesquels je me suis intéressé à la convergence p.s. et à la normalité asymptotique de (la version spatiale de) l'estimateur à noyau de la régression introduit par Nadaraya [**121**] et Watson [**155**]. Soit $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire de variables aléatoires réelles indexées par $\mathbb{Z}^d$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on s'intéresse au modèle suivant

$$Y_i = g(i/n) + \varepsilon_i$$

avec $i \in \Lambda_n := \{1, ..., n\}^d$ et $g : [0,1]^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction (inconnue) que l'on souhaite estimer. Ce modèle de régression dit du « design fixé » a été également étudié par Bosq [**15**], Gasser et Muller [**70**], Hall [**81**] et Hall et Hart [**82**] dans le cas temporel ($d = 1$). Si $\mathrm{K} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est un noyau de probabilité (i.e. $\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{K}(t)dt = 1$) et si $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels qui tend vers 0 par valeurs positives (paramètre de fenêtre) alors on définit l'estimateur g_n de Nadaraya-Watson de g pour tout x dans $[0,1]^d$ par

$$g_n(x) = \frac{\sum_{i\in\Lambda_n} Y_i\mathrm{K}\left(\frac{x-i/n}{b_n}\right)}{\sum_{i\in\Lambda_n}\mathrm{K}\left(\frac{x-i/n}{b_n}\right)}. \tag{32}$$

Pour tout $x = (x_1, ..., x_d) \in [0,1]^d$, on pose $|x| = \max_{1\leq s\leq d}|x_s|$. Pour établir la convergence p.s. de l'estimateur g_n vers g, nous considérons les hypothèses suivantes :

(E1) K est symétrique, lipschitzien, positif et nul hors de $[-1,1]^d$. De plus, il existe deux constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que $c \leqslant \mathrm{K}(x) \leqslant C$ pour tout x dans $[-1,1]^d$.

(E2) Il existe $\kappa > 0$ telle que $g \in \mathrm{Lip}(\kappa)$ où $\mathrm{Lip}(\kappa)$ est l'ensemble de toutes les fonctions κ-lipschitziennes.

Si $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont des nombres strictement positifs, on écrit $Z_n = O_{\text{p.s.}}(v_n)$ si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $\limsup_{n\to\infty} v_n^{-1}|Z_n| \leqslant \lambda$ p.s. D'autre part, pour tout k dans $\mathbb{Z}^d$, on note

$$\mathcal{F}_k := \sigma\left(\varepsilon_i\,;\ i <_{\text{lex}} 0 \text{ et } |i| > |k|\right).$$

Le résultat principal établi dans [**53**] est le suivant.

Théorème 28 (El Machkouri, 2007). *Supposons que* $(E1)$ *et* $(E2)$ *soient vraies et choisissons* $b_n = (n^{-d}\log n)^{1/(2+d)}$.

(i) Si ε_0 *est bornée et si* $\sum_{k<_{lex}0}\|\varepsilon_k\mathbb{E}[\varepsilon_0\,|\,\mathcal{F}_k]\|_\infty < \infty$ *alors*

$$\sup_{x\in[0,1]^d}\sup_{g\in Lip(\kappa)}|g_n(x)-g(x)| = O_{p.s.}\left[\left(\frac{\log n}{n^d}\right)^{\frac{1}{2+d}}\right].$$

(ii) S'il existe deux constantes $0<q<2$ *et* $c>0$ *telles que* $\mathbb{E}\left[\exp(c|\varepsilon_0|^{\frac{2q}{2-q}})\right] < \infty$ *et si* $\sum_{k<_{lex}0}\left\|\sqrt{|\varepsilon_k\mathbb{E}[\varepsilon_0\,|\,\mathcal{F}_k]|}\right\|^2_{\psi_{2q/(2-q)}} < \infty$ *où* $\psi_{2q/(2-q)}$ *est la fonction de Young définie par* (19) *alors*

$$\sup_{x\in[0,1]^d}\sup_{g\in Lip(\kappa)}|g_n(x)-g(x)| = O_{p.s.}\left[(\log n)^{\frac{2-q}{2q}}\left(\frac{\log n}{n^d}\right)^{\frac{1}{2+d}}\right].$$

Le théorème 28 met en évidence que pour des erreurs $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ bornées, la vitesse optimale en $(n^{-d}\log n)^{1/(2+d)}$ pour la convergence uniforme (voir Stone [**145**]) est atteinte par l'estimateur à noyau de Nadaraya-Watson sous la condition projective introduite par Dedecker [**41**].

J'ai également étudié dans mon article [**63**] en collaboration avec R. Stoica, la convergence en loi de l'estimateur (32). Tout d'abord, rappelons la définition du concept de convergence en loi stable au sens de Rényi [**132**].

Définition 11. *Soit* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *et* X *des variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *et soit* $\mathcal{U}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$. *On dit que* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *converge en loi de manière* $\mathcal{U}$*-stable vers* X *si pour toute fonction* $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *continue bornée et toute variable aléatoire* $\mathcal{U}$*-mesurable bornée* Z, *on a* $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\varphi(X_n)Z] = \mathbb{E}[\varphi(X)Z]$.

Pour tout κ, on note $C^1(\kappa)$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles continument différentiables sur $[0,1]^d$ telles que

$$\sup_{x\in[0,1]^d}\max_{\alpha\in\mathcal{M}}|D_\alpha(f)(x)| \leqslant \kappa$$

où pour tout $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d$, on a noté

$$D_\alpha(f) = \frac{\partial^{\hat{\alpha}}f}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_d^{\alpha_d}} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \left\{\alpha\in\mathbb{N}^d \big/ \hat{\alpha} = \sum_{i=1}^d \alpha_i\right\}.$$

Rappelons que le champ aléatoire $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ peut s'écrire sans perte de généralité sous la forme $(f\circ T^i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ où f est la projection de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(\omega)=\omega_0$ et pour tout i dans $\mathbb{Z}^d$, l'opérateur $T^i:\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\longrightarrow\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ est la translation définie par $(T^i(\omega))_k=\omega_{i+k}$ pour tout k dans $\mathbb{Z}^d$ et tout ω dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Un élément mesurable A est alors dit invariant pour T si $T^k(A)=A$ p.s. pour tout k dans $\mathbb{Z}^d$ et on note $\mathcal{I}$ la tribu de tous les éléments invariants pour T. Dans la suite, on note également $\eta := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{E}[\varepsilon_0\varepsilon_k\,|\,\mathcal{I}]$ et $\sigma^2 := \int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{K}^2(t)dt$. Le résultat suivant est démontré dans [**63**].

Théorème 29 (El Machkouri, Stoica, 2010). *Supposons que $nb_n^{d+1} \longrightarrow \infty$ et $nb_n^{\frac{d+2}{2}} \longrightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini. S'il existe $\kappa > 0$ tel que $g \in C^1(\kappa)$ et si $\sum_{k<_{lex}0} \|\varepsilon_k \mathbb{E}[\varepsilon_0 \,|\, \mathcal{F}_k]\|_1 < \infty$ alors pour tout entier $k \geqslant 1$ et tous éléments $x_1, ..., x_k$ deux à deux distincts dans $[0,1]^d$, on a*

$$(nb_n)^{d/2} \begin{pmatrix} g_n(x_1) - g(x_1) \\ \vdots \\ g_n(x_k) - g(x_k) \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \sigma\sqrt{\eta}\,(N_1, ..., N_k)^\top$$

où $(N_1, ..., N_k)^\top$ est un vecteur gaussien de moyenne nulle dont la matrice de covariance est la matrice identité d'ordre k. De plus, la convergence en loi est $\mathcal{I}$-stable au sens de Rényi et $(N_1, ..., N_k)^\top$ est indépendant de η.

Le théorème 29 établit ainsi la normalité asymptotique de l'estimateur de Nadaraya-Watson lorsque le modèle est à design fixé. Dans le paragraphe suivant, je présente un résultat analogue pour le modèle à design aléatoire en utilisant une approche basée sur l'estimateur de la régression par polynômes locaux (à l'ordre 1).

3. Estimation de la régression par polynômes locaux

Les résultats présentés ici ont été publiés dans mon article [**58**] en collaboration avec K. Es-Sebaiy et I. Ouassou. Soit $(Y_i, X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On se propose d'estimer la fonction de régression g définie par $g(x) = \mathbb{E}[Y_0 | X_0 = x]$ pour presque-tout x dans $\mathbb{R}$. Pour les séries temporelles, d'innombrables résultats existent sur la question. Le lecteur peut se référer par exemple aux articles de Lu et Cheng [**112**], Masry et Fan [**115**], Robinson [**135**], Roussas [**138**]. Pour les champs aléatoires fortement mélangeant, on peut citer les travaux de Biau et Cadre [**10**], Carbon et al. [**26**], Dabo-Niang et Rachdi [**37**], Dabo-Niang et Yao [**38**], Hallin et al. [**85**] et Lu et Chen [**110, 111**]. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Supposons que g est dérivable en x et notons $g'(x)$ le nombre dérivé de g en x. Nous considérons ici une approche par polynômes locaux (à l'ordre 1) dont le principe est d'approximer $g(z)$ par $g(x) + g'(x)(z - x)$ pour tout z dans un voisinage de x et d'estimer simultanément $(g(x), g'(x))$ au lieu d'utiliser une approche classique de g seulement par la méthode du noyau de Nadaraya-Watson. On définit l'estimateur de la régression par polynômes locaux $(g_n, g_n')^\top$ de $(g, g')^\top$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ tel que g soit dérivable en x par

$$\begin{pmatrix} g_n(x) \\ g_n'(x) \end{pmatrix} = \underset{(s,t)\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{i\in\Lambda_n} (Y_i - s - t(X_i - x))^2\, \mathrm{K}\left(\frac{X_i - x}{b_n}\right), \tag{33}$$

où b_n est le paramètre de fenêtre qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, Λ_n est le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ sur lequel sont indexées les observations X_i et K est un noyau de probabilité. On considère les notations suivantes :

$$u_{00}(n) = \frac{1}{|\Lambda_n| b_n} \sum_{i\in\Lambda_n} \mathrm{K}\left(\frac{X_i - x}{b_n}\right), \quad u_{11}(n) = \frac{1}{|\Lambda_n| b_n} \sum_{i\in\Lambda_n} \left(\frac{X_i - x}{b_n}\right)^2 \mathrm{K}\left(\frac{X_i - x}{b_n}\right),$$

$$u_{01}(n) = u_{10}(n) = \frac{1}{|\Lambda_n| b_n} \sum_{i\in\Lambda_n} \left(\frac{X_i - x}{b_n}\right) \mathrm{K}\left(\frac{X_i - x}{b_n}\right),$$

$$v_0(n) = \frac{1}{|\Lambda_n| b_n} \sum_{i \in \Lambda_n} Y_i \mathrm{K}\left(\frac{X_i - x}{b_n}\right), \quad v_1(n) = \frac{1}{|\Lambda_n| b_n} \sum_{i \in \Lambda_n} Y_i \left(\frac{X_i - x}{b_n}\right) \mathrm{K}\left(\frac{X_i - x}{b_n}\right),$$

$$w_0(n) = \frac{1}{|\Lambda_n| b_n} \sum_{i \in \Lambda_n} Z_i \mathrm{K}\left(\frac{X_i - x}{b_n}\right) \quad \text{et} \quad w_1(n) = \frac{1}{|\Lambda_n| b_n} \sum_{i \in \Lambda_n} Z_i \left(\frac{X_i - x}{b_n}\right) \mathrm{K}\left(\frac{X_i - x}{b_n}\right)$$

avec $Z_i = Y_i - g(x) - g'(x)(X_i - x)$. On peut montrer également que

$$\begin{pmatrix} g_n(x) \\ g_n'(x) b_n \end{pmatrix} = U_n^{-1} V_n \quad \text{où} \quad U_n = \begin{pmatrix} u_{00}(n) & u_{10}(n) \\ u_{01}(n) & u_{11}(n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} v_0(n) \\ v_1(n) \end{pmatrix}.$$

Si on pose $W_n = V_n - U_n \left(g(x), g'(x) b_n\right)^\top = \left(w_0(n), w_1(n)\right)^\top$ alors

$$G(n,x) := \begin{pmatrix} g_n(x) - g(x) \\ \left(g_n'(x) - g'(x)\right) b_n \end{pmatrix} = U_n^{-1} W_n. \tag{34}$$

Pour tout $c = (c_0, c_1) \in \mathbb{R}^2$ et tout s dans $\mathbb{R}$, on pose $\mathrm{K}_c(s) = (c_0 + c_1 s)\mathrm{K}(s)$. Considèrons les hypothèses suivantes :

(H1) Pour tout c dans $\mathbb{R}^2$, on a $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathrm{K}_c(t)| < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{K}_c(t)| dt < \infty$ et la fonction ψ definie pour tout réel x par $r(x) = \sup_{|t| \geqslant |x|} t^2 \mathrm{K}_c(t)$ est intégrable.

(H2) g est de classe $\mathcal{C}^2$.

(H3) Il existe $\kappa > 0$ tel que $\sup_{k \neq 0} |f_{0,k}(x,y) - f(x)f(y)| \leq \kappa$ pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ où $f_{0,k}$ est la densité jointe continue de (X_0, X_k) et f est la densité marginale continue de X_0.

(H4) $\mathbb{E}\left[|Y_0|^{2+\delta}\right] < \infty$ pour un certain $\delta > 0$.

(H5) $b_n \longrightarrow 0$ et $|\Lambda_n| b_n^3 \longrightarrow \infty$.

(H6) $b_n \longrightarrow 0$ tel que $|\Lambda_n| b_n \longrightarrow \infty$ et $|\Lambda_n| b_n^5 \longrightarrow 0$.

Le résultat principal établi dans mon article [**58**] est le suivant.

Théorème 30 (El Machkouri, Es-Sebaiy, Ouassou, 2017). *Si* (H1)–(H4) *et* (H6) *sont vraies et si*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{(2d-1)\delta + 6d - 2}{2+\delta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\delta}{2+\delta}}(m) < \infty, \tag{35}$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) > 0$,

$$\sqrt{|\Lambda_n| b_n}\, G(n,x) \xrightarrow[n \to \infty]{Loi} \mathcal{N}\left(0, U^{-1} \Sigma (U^{-1})^\top\right),$$

où

$$\Sigma = \mathbb{V}\left(Y_0 | X_0 = x\right) f(x) \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{K}^2(t) dt & \int_{\mathbb{R}} t\mathrm{K}^2(t) dt \\ \int_{\mathbb{R}} t\mathrm{K}^2(t) dt & \int_{\mathbb{R}} t^2 \mathrm{K}^2(t) dt \end{pmatrix}$$

et

$$U = f(x) \begin{pmatrix} 1 & \int_{\mathbb{R}} t\mathrm{K}(t) dt \\ \int_{\mathbb{R}} t\mathrm{K}(t) dt & \int_{\mathbb{R}} t^2 \mathrm{K}(t)\, dt \end{pmatrix}.$$

Le théorème 30 étend le théorème 3.1 établi par Hallin et al. [**85**] puisque la condition (35) est plus faible que l'hypothèse $\alpha_{1,\infty}(m) = O\left(m^{-\mu}\right)$ avec $\mu > 2(3+\delta)d/\delta$ imposée dans [**85**]. De plus, il est important de souligner de nouveau que les régions Λ_n sur lesquelles le champ aléatoire est observé sont très générales alors que celles-ci sont supposées rectangulaires dans

[**85**]. Enfin, la condition (H6) sur le paramètre de fenêtre est là encore très simple comparée à celles imposées dans [**85**].

Tous les résultats sur la normalité asymptotique exposés dans ce chapitre plaident en faveur de la « supériorité » de la méthode de Lindeberg sur la méthode des blocs de Bernstein. La méthode de Lindeberg permet en effet d'établir plusieurs TLC pour différents estimateurs à noyau sous les conditions « minimales » sur le paramètre de fenêtre et sous des hypothèses très simples sur les coefficients de dépendance considérés. A ma connaissance, dans le cas spatial, il n'existe pas d'autres résultats dans la littérature établissant la normalité asymptotique pour des estimateurs à noyau sous des conditions « minimales » sur le paramètre de fenêtre.

Chapitre 4

Perspectives

1. **TLC pour les martingales via la méthode de Stein.** En 1972, Stein [**143**] a introduit une nouvelle méthode pour obtenir une borne entre la distribution d'une somme de n variable aléatoires dépendantes et la distribution d'une variable aléatoire suivant une loi normale pour la métrique de Kolmogorov. Plus généralement, la méthode de Stein permet de borner la distance entre deux lois de probabilités pour une métrique de la forme
$$d(P, Q) = \sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \int h dP - \int h dQ \right| = \sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \mathbb{E}\left[h(W)\right] - \mathbb{E}\left[h(Z)\right] \right|$$
où P et Q désignent des mesures de probabilité sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, W et Z sont des variables aléatoires de lois P et Q respectivement et $\mathcal{H}$ est un ensemble de fonctions définies sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Des exemples importants sont la distance en variation totale où $\mathcal{H} = \{ \mathbb{1}_A; A \in \mathcal{F}\}$, la métrique uniforme de Kolmogorov où $\mathcal{H} = \{ \mathbb{1}_{]-\infty, x]}; x \in \mathbb{R}\}$ et la métrique de Wasserstein où Ω est un espace métrique et $\mathcal{H}$ est l'ensemble des applications 1-lipschitziennes. On suppose à présent que la loi $Q = \mathcal{N}(0,1)$ est fixée. L'idée de Stein repose sur la caractérisation
$$\mathbb{E}\left[f'(Z) - Zf(Z)\right] = 0 \text{ pour tout } f \in C_b^1 \Longleftrightarrow Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$
où C_b^1 désigne les fonctions f absolument continues telles que $\mathbb{E}\left[|f'(Z)|\right] < \infty$. Si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale standard alors pour tout réel x, l'unique solution bornée f_x de l'équation différentielle
$$f_x'(\omega) - \omega f_x(\omega) = \mathbb{1}_{]-\infty, x]}(\omega) - \Phi(x)$$
est définie par
$$f_x(\omega) = e^{\omega^2/2} \int_{\omega}^{\infty} e^{-t^2/2} \left(\Phi(x) - \mathbb{1}_{]-\infty, x]}(t)\right) dt.$$
On peut vérifier alors que pour toute variable aléatoire W, on a
$$\left|\mathbb{P}\left(W \leqslant x\right) - \Phi(x)\right| = \left|\mathbb{E}\left[f_x'(W) - Wf_x(W)\right]\right|.$$
Il suffit alors de contrôler le terme $\left|\mathbb{E}\left[f_x'(W) - Wf_x(W)\right]\right|$ pour obtenir une borne pour la distance de Kolmogorov entre la loi de W et la loi normale standard.
Dans la littérature, des centaines d'articles utilisent la méthode de Stein pour étudier la loi asymptotique de différentes fonctionnelles de variables aléatoires dépendantes. De manière assez surprenante, il semble difficile ([**34**]) de donner une preuve du TLC de Billingsley-Ibragimov avec vitesse de convergence (voir [**13**], [**62**] et [**69**]) en utilisant la méthode de Stein. Il me semble intéressant d'explorer cette voie qui peut fournir un

autre éclairage sur le TLC pour les martingales.

2. **Estimation récursive en statistique spatiale non paramétrique.** De nos jours, les outils informatiques modernes dont nous disposons nous permettent de collecter énormément de données et ceci au fil du temps. Afin d'optimiser en pratique le temps de calcul, il est important de considérer une approche récursive du problème de l'estimation de la densité sous-jacente f dont sont issues ces données. En 1969, Wolverton et Wagner [**158**] ont introduit une version récursive f_n^{WW} de l'estimateur de Parzen-Rosenblatt dans le cas temporel. On pose $f_0^{\mathrm{WW}} = 0$ et pour tout x dans $\mathbb{R}^d$, on définit $f_n^{\mathrm{WW}}(x)$ par

$$f_n^{\mathrm{WW}}(x) = \frac{n-1}{n} f_{n-1}^{\mathrm{WW}}(x) + \frac{1}{nh_n^d} \mathrm{K}\left(\frac{x - X_n}{h_n}\right) \tag{36}$$

où $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On peut alors vérifier que

$$f_n^{\mathrm{WW}}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i^d} \mathrm{K}\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right).$$

L'intérêt de la définition récursive (36) est de permettre le calcul de $f_n^{\mathrm{WW}}(x)$ à partir de $f_{n-1}^{\mathrm{WW}}(x)$ et de l'observation X_n sans avoir à recalculer $f_n^{\mathrm{WW}}(x)$ sur la base de l'ensemble des observations $X_1, ..., X_n$. Ce type de méthode est très prisée de nos jours lorsque l'on cherche à inférer sur des phénomènes qui évoluent au cours du temps et qui nécessitent une mise à jour constante des estimations effectuées. Le gain en terme de temps de calcul est très appréciable par rapport aux méthodes traditionnelles. De plus, les estimateurs récursifs peuvent s'avérer préférables aux versions non récursives du fait de leur plus faible variance asymptotique. Dans le cas temporel, les propriétés asymptotiques de l'estimateur f_n^{WW} ont été étudiées entre autres par Devroye [**45**], Menon et al. [**117**] et Wertz [**156**]. En 2010, Amiri [**2**] a introduit une nouvelle classe d'estimateurs récursifs f_n^ℓ de la densité dans le cas temporel : pour tout $\ell \in [0, 1]$, pour tout $n \geq 1$ et tout x dans $\mathbb{R}^d$, on pose

$$f_n^\ell(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-\ell)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i^{d\ell}} \mathrm{K}\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right). \tag{37}$$

Pour $\ell = 0$, on retrouve l'estimateur f_n^{WW}. Dans le cas temporel, Amiri [**2**] a démontré la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur f_n^ℓ pour chaque $\ell \in [0, 1]$ et pour des données $X_1, ..., X_n$ fortement mélangeantes. Les méthodes employées ne sont pas suffisamment performantes et les résultats obtenus par ce dernier peuvent être améliorés et étendus au cas spatial. Plus généralement, pour l'estimation d'une densité de probabilité, on peut considérer la procédure de Robbins-Monro. Il s'agit de construire un algorithme qui permet de rechercher le zéro d'une fonction inconnue $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Tout d'abord, $Z_0 \in \mathbb{R}$ est fixé de manière arbitraire puis on définit la suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ par

$$Z_n = Z_{n-1} + \gamma_n W_n$$

où W_n est une *observation* de la fonction h au point Z_{n-1} et $(\gamma_n)_n$ est une suite de nombre réels strictement positifs qui converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et si f est une densité de probabilité de la loi de X_1 alors, pour construire un algorithme stochastique qui fournit une approximation de f en un point donné x, il suffit de définir un algorithme de type Robbins-Monro pour rechercher le zéro de la fonction $h : y \mapsto f(x) - y$. Plus précisemment, on choisit $f_0(x)$ dans $\mathbb{R}$, puis pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \gamma_n W_n(x)$$

où $W_n(x)$ est une *observation* de la fonction h au point $f_{n-1}(x)$. Pour définir $W_n(x)$, on considère l'approche de Révész [**133**] et Tsybakov [**147**] et on pose

$$W_n(x) = \frac{1}{h_n^d}\mathrm{K}\left(\frac{x - X_n}{h_n}\right) - f_{n-1}(x)$$

où K est un noyau de probabilité et $(h_n)_n$ est une suite de nombre réels strictement positifs qui converge vers 0 (paramètres de la fenêtre). L'algorithme stochastique qui permet d'estimer f au point x peut alors s'écrire

$$f_n(x) = (1 - \gamma_n)f_{n-1}(x) + \frac{\gamma_n}{h_n^d}\mathrm{K}\left(\frac{x - X_n}{h_n}\right). \tag{38}$$

Soit $(w_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombre réels telle que $\sum_{n\geqslant 1} w_n = \infty$. Si on choisit

$$\gamma_n = \frac{w_n}{\sum_{k=1}^n w_k}$$

alors l'estimateur f_n défini par (38) peut s'écrire

$$f_n(x) = \frac{1}{\sum_{k=1}^n w_k}\sum_{k=1}^n w_k h_k^{-d}\mathrm{K}\left(\frac{x - X_k}{h_k}\right).$$

En particulier, si on choisit $w_k = h_k^{d(1-\ell)}$ avec $\ell \in [0, 1]$, on obtient l'estimateur (37) introduit par Amiri [**2**]. À ma connaissance, il n'existe aucune étude de ce type d'algorithme stochastique pour des variables dépendantes dans le contexte de l'estimation non paramétrique d'une densité. Cette question fera très prochainement l'objet d'une étude avec Lucas Reding dont je co-encadre la thèse de Doctorat avec Dalibor Volný au sein du laboratoire de mathématiques Raphaël Salem de l'Université de Rouen Normandie. Pour les variables indépendantes, on peut citer les travaux récents de Mokkadem, Pelletier et Slaoui ([**119**],[**120**]).

3. Théorèmes limite pour les chaînes de Markov stationnaires. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'état $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ et de noyau de probabilité $P(x, dy)$ sur $\mathbb{S} \times \mathcal{S}$. On suppose que $P(x, dy)$ admet une loi stationnaire π sur $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$, c'est à dire

$$\pi(A) = \int_{\mathbb{S}} \pi(dx)P(x, A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

On définit l'opérateur de transition P pour tout $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{S}, \mathcal{S}, \pi)$ avec $p \in [1, +\infty]$ par

$$(Pf)(x) = \int_{\mathbb{S}} P(x, dy)f(y).$$

On dit que P est *uniformément intégrable dans* $\mathbb{L}^2(\mathbb{S},\mathcal{S},\pi)$ (en abrégé 2-U.I.) si

$$\left\{|Pf|^2\,;\, f\in\mathbb{L}^2(\mathbb{S},\mathcal{S},\pi),\ \|f\|_2\leqslant 1\right\}\quad\text{est uniformément } \pi\text{-intégrable.}$$

On dit que P est *hyperborné* si il existe $q>2$ tel que $P\,:\,\mathbb{L}^2(\mathbb{S},\mathcal{S},\pi)\longrightarrow\mathbb{L}^q(\mathbb{S},\mathcal{S},\pi)$ soit un opérateur linéaire borné, c'est à dire si

$$\sup\left\{\pi\left(|Pf|^q\right)\,;\, f\in\mathbb{L}^2(\mathbb{S},\mathcal{S},\pi),\ \|f\|_{\mathbb{L}^2(\pi)}\leqslant 1\right\}<\infty.$$

On dit que P est *ultraborné* si

$$\sup\left\{\|Pf\|_\infty\,;\, f\in\mathbb{L}^1(\mathbb{S},\mathcal{S},\pi),\ \|f\|_{\mathbb{L}^1(\pi)}\leqslant 1\right\}<\infty.$$

On dit que P admet un *trou spectral dans* $\mathbb{L}^2(\mathbb{S},\mathcal{S},\pi)$ si il existe $0<a<1$ tel que

$$\sup\left\{\|Pf\|_{\mathbb{L}^2(\pi)}\,;\,\int_{\mathbb{S}}f(x)d\pi(x)=0,\ \|f\|_{\mathbb{L}^2(\pi)}\leqslant 1\right\}\leqslant a. \tag{39}$$

Si P admet un trou spectral dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S},\mathcal{S},\pi)$ alors pour tout entier $n\geqslant 1$ et $f\in\mathbb{L}^2_0(\mathbb{S},\mathcal{S},\pi)\,:=\{f\in\mathbb{L}^2(\mathbb{S},\mathcal{S},\pi);\int_{\mathbb{S}}f(x)d\pi(x)=0\}$, on obtient l'inégalité

$$\|P^nf\|_{\mathbb{L}^2(\pi)}\leqslant a^n\,\|f\|_{\mathbb{L}^2(\pi)}$$

qui est une condition suffisante (voir [**77**]) pour la normalité asymptotique des sommes partielles normalisées $n^{-1/2}\sum_{k=1}^n\Psi(X_k)$ pour toute fonction $\Psi\,:\,\mathbb{S}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{S}}\Psi(x)\pi(dx)=0$ et $\int_{\mathbb{S}}\Psi^2(x)\pi(dx)<\infty$. Pour les chaînes de Markov apériodiques, irréductibles et réversibles, la propriété (39) est équivalente à l'*ergodicité géométrique* : il existe $0<\rho<1$ et $C\,:\,\mathbb{S}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ tels que pour π-presque tout $x\in\mathbb{S}$,

$$\|P^n(x,.)-\pi\|_{\mathrm{VT}}\leqslant C(x)\rho^n$$

où $\|.\|_{\mathrm{VT}}$ est la distance en variation totale. Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas réversible alors (39) implique l'ergodicité géométrique mais la réciproque n'est pas vraie (voir [**101**], Théorèmes 1.3 et 1.4). Autrement dit, il existe des chaînes de Markov qui sont géométriquement ergodiques mais qui n'admettent pas de trou spectral dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S},\mathcal{S},\pi)$. Pour de telles chaînes de Markov, le TLC peut ne pas avoir lieu (voir [**79**]). En collaboration avec A. Jakubowski et D. Volný, je m'intéresse actuellement aux travaux [**29**] et [**94**] dans lesquels des théorèmes limite vers une loi stable sont établis pour des chaînes de Markov lorsque P est hyperborné et sous l'hypothèse d'existence d'un trou spectral dans $\mathbb{L}^2$. Notre objectif est de démontrer que l'on peut remplacer l'hypothèse « P est hyperborné » par la condition beaucoup plus faible « P est 2-U.I » en utilisant le *principe du conditionnement* qui, heuristiquement, permet d'obtenir des théorèmes limite pour des variables dépendantes à partir de leurs versions pour les variables indépendantes (voir [**93**]).

Liste de mes publications dans des revues à comité de lecture

Travaux réalisés après ma thèse de Doctorat :

[P1] M. El Machkouri, K. Es-Sebaiy, and I. Ouassou. On local linear regression for strongly mixing random fields. *J. Multivariate Anal.*, 156 :103–115, 2017.

[P2] M. El Machkouri, K. Es-Sebaiy, and Y. Ouknine. Parameter estimation for the non-ergodic Ornstein-Uhlenbeck processes driven by Gaussian processes. *J. Korean Statist. Soc.*, 45(3) :329–341, 2016.

[P3] M. El Machkouri and D. Giraudo. Orthomartingale-coboundary decomposition for stationary random fields. *Stoch. Dyn.*, 16(5) :1650017, 28, 2016.

[P4] M. El Machkouri. Kernel density estimation for stationary random fields. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 11(1) :259–279, 2014.

[P5] M. El Machkouri. On the asymptotic normality of frequency polygons for strongly mixing spatial processes. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 16(3) :193–206, 2013.

[P6] M. El Machkouri, D. Volný, and W. B. Wu. A central limit theorem for stationary random fields. *Stochastic Process. Appl.*, 123(1) :1–14, 2013.

[P7] M. El Machkouri. Asymptotic normality for the Parzen-Rosenblatt density estimator for strongly mixing random fields. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 14(1) :73–84, 2011.

[P8] M. El Machkouri and R. Stoica. Asymptotic normality of kernel estimates in a regression model for random fields. *J. Nonparametr. Stat.*, 22(8) :955–971, 2010.

[P9] E. H. El Abdalaoui, M. El Machkouri, and A. Nogueira. A criterion of weak mixing property. In *École de Théorie Ergodique*, volume 20 of *Sémin. Congr.*, pages 105–111. Soc. Math. France, Paris, 2010.

[P10] M. El Machkouri. Berry-Esseen's central limit theorem for non-causal linear processes in Hilbert spaces. *African Diaspora Journal of Mathematics*, 10(2) :1–6, 2010.

[P11] M. El Machkouri and L. Ouchti. Exact convergence rates in the central limit theorem for a class of martingales. *Bernoulli*, 13(4) :981–999, 2007.

[P12] M. El Machkouri. Nonparametric regression estimation for random fields in a fixed-design. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 10(1) :29–47, 2007.

[P13] M. El Machkouri and L. Ouchti. Invariance principles for standard-normalized and self-normalized random fields. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 2 :177–194, 2006.

Travaux réalisés dans le cadre de ma thèse de Doctorat :

[P14] M. El Machkouri and D. Volný. On the local and central limit theorems for martingale difference sequences. *Stochastics and Dynamics*, 4(2) :1–21, 2004.

[P15] M. El Machkouri and D. Volný. Contre-exemple dans le théorème central limite fonctionnel pour les champs aléatoires réels. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 2 :325–337, 2003.

[P16] M. El Machkouri. Kahane-Khintchine inequalities and functional central limit theorem for stationary random fields. *Stoch. Proc. and Their Appl.*, 120 :285–299, 2002.

Bibliographie

[1] K. S. Alexander and R. Pyke. A uniform central limit theorem for set-indexed partial-sum processes with finite variance. *Ann. Probab.*, 14 :582–597, 1986.

[2] A. Amiri. *Estimateurs fonctionnels récursifs et leurs applications à la prévision.* 2010. Thèse de Doctorat.

[3] D. W. K. Andrews. Nonstrong mixing autoregressive processes. *J. Appl. Probab.*, 21(4) :930–934, 1984.

[4] R. F. Bass. Law of the iterated logarithm for set-indexed partial sum processes with finite variance. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 70 :591–608, 1985.

[5] A. K. Basu and C. C. Y. Dorea. On functional central limit theorem for stationary martingale random fields. *Acta. Math. Hung.*, 33 :307–316, 1979.

[6] J. Beirlant, A. Berlinet, and L. Györfi. On piecewise linear density estimators. *Statist. Neerlandica*, 53(3) :287–308, 1999.

[7] R. Belfadli, K. Es-Sebaiy, and Y. Ouknine. Parameter estimation for fractional ornstein-uhlenbeck processes : non-ergodic case. *Frontiers in Science and Engineering (an international journal edited by Hassan II Academy of Science and Technology*, 1(1) :1–16, 2011.

[8] N. Bensaid and S. Dabo-Niang. Frequency polygons for continuous random fields. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 13(1) :55–80, 2010.

[9] A. C. Berry. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49 :122–136, 1941.

[10] G. Biau and B. Cadre. Nonparametric spatial prediction. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 7(3) :327–349, 2004.

[11] P. Billingsley. The Lindeberg-Lévy theorem for martingales. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12 :788–792, 1961.

[12] P. Billingsley. *Convergence of probability measures.* Wiley, 1968.

[13] E. Bolthausen. Exact convergence rates in some martingale central limit theorems. *Ann. Prob.*, 10 :672–688, 1982.

[14] E. Bolthausen. On the central limit theorem for stationary mixing random fields. *Ann. Probab.*, 10 :1047–1050, 1982.

[15] D. Bosq. Bernstein-type large deviations inequalities for partial sums of strong mixing processes. *Statistics*, 24 :59–70, 1993.

[16] D. Bosq. Berry-Esseen inequality for linear processes in Hilbert spaces. *Statistics and Probability Letters*, 63 :243–247, 2003.

[17] D. Bosq. Erratum and complements to : "Berry-Esseen inequality for linear processes in Hilbert spaces" [Statist. Probab. Lett. **63** (2003), no. 3, 243–247 ; mr1986323]. *Statist. Probab. Lett.*, 70(2) :171–174, 2004.

[18] D. Bosq, F. Merlevède, and M. Peligrad. Asymptotic normality for density kernel estimators in discrete and continuous time. *J. Multivariate Anal.*, 68(1) :78–95, 1999.

[19] R. C. Bradley. On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields. *J. Theoret. Probab.*, 5(2) :355–373, 1992.

[20] R. C. Bradley. Basic properties of strong mixing conditions. A survey and some open questions. *Probab. Surv.*, 2 :107–144, 2005. Update of, and a supplement to, the 1986 original.

[21] A. Bulinski. Central limit theorem for random fields and applications. In *Advances in data analysis*, Stat. Ind. Technol., pages 141–150. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2010.

[22] A. V. Bulinskiĭ. Various mixing conditions and the asymptotic normality of random fields. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 299(4) :785–789, 1988.

[23] R. Cairoli. Un théorème de convergence pour martingales à indices multiples. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 269 :A587–A589, 1969.

[24] M. Carbon. Polygone des fréquences pour des champs aléatoires. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(9) :693–696, 2006.

[25] M. Carbon, C. Francq, and L.T. Tran. Asymptotic normality of frequency polygons for random fields. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140 :502–514, 2010.

[26] M. Carbon, Ch. Francq, and L. T. Tran. Kernel regression estimation for random fields. *J. Statist. Plann. Inference*, 137(3) :778–798, 2007.

[27] M. Carbon, B. Garel, and L. T. Tran. Frequency polygons for weakly dependent processes. *Statist. Probab. Lett.*, 33(1) :1–13, 1997.

[28] J. L. Casti. *Nonlinear system theory*, volume 175 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1985.

[29] P. Cattiaux and M. Manou-Abi. Limit theorems for some functionals with heavy tails of a discrete time Markov chain. *ESAIM Probab. Stat.*, 18 :468–482, 2014.

[30] R. V. Chacon. Approximation of transformations with continuous spectrum. *Pacific J. Math.*, 31 :293–302, 1969.

[31] R. V. Chacon. Weakly mixing transformations which are not strongly mixing. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 22 :559–562, 1969.

[32] J.-R. Chazottes, C. Cuny, J. Dedecker, X. Fan, and S. Lemler. Limit theorems and inequalities via martingale methods. In *Journées MAS 2012*, volume 44 of *ESAIM Proc.*, pages 177–196. EDP Sci., Les Ulis, 2014.

[33] D. Chen. A uniform central limit theorem for nonuniform ϕ-mixing random fields. *Ann. Probab.*, 19 :636–649, 1991.

[34] L.H.Y. Chen. Discussion privée au congrès mondial de la statistique (Marrakech), 2017.

[35] W. S. Cleveland. Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 74(368) :829–836, 1979.

[36] Ch. Cuny, J. Dedecker, and D. Volný. A functional CLT for fields of commuting transformations via martingale approximation. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 441(22) :239–262, 2015.

[37] S. Dabo-Niang, M. Rachdi, and A.-F. Yao. Kernel regression estimation for spatial functional random variables. *Far East J. Theor. Stat.*, 37(2) :77–113, 2011.

[38] S. Dabo-Niang and A.-F. Yao. Kernel regression estimation for continuous spatial processes. *Math. Methods Statist.*, 16(4) :298–317, 2007.

[39] T. de la Rue. Vitesse de dispertion pour une classe de martingales. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 38 :465–474, 2002.

[40] A. de Moivre. *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis.* London, 1730.

[41] J. Dedecker. A central limit theorem for stationary random fields. *Probab. Theory Relat. Fields*, 110 :397–426, 1998.

[42] J. Dedecker. Exponential inequalities and functional central limit theorems for random fields. *ESAIM : Probability and Statistics*, 5 :77–104, 2001.

[43] J. Dedecker and F. Merlevède. Necessary and sufficient conditions for the conditional central limit theorem. *Annals of Probability*, 30(3) :1044–1081, 2002.

[44] J. Dedecker and C. Prieur. New dependence coefficients. Examples and applications to statistics. *Probab. Theory Related Fields*, 132(2) :203–236, 2005.

[45] L. Devroye. On the pointwise and the integral convergence of recursive kernel estimates of probability densities. *Utilitas Math.*, 15 :113–128, 1979.

[46] M. D. Donsker. An invariance principle for certain probability limit theorems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 6 :1–12, 1951.

[47] P. Doukhan. *Mixing : properties and examples*, volume 85. Lecture Notes in Statistics, Berlin, 1994.

[48] P. Doukhan and S. Louhichi. A new weak dependence condition and applications to moment inequalities. *Stochastic Process. Appl.*, 84(2) :313–342, 1999.

[49] R. M. Dudley. Sample functions of the Gaussian process. *Ann. Probab.*, 1 :66–103, 1973.

[50] R. M. Dudley. Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries. *J. Approx. Theory*, 10 :227–236, 1974.

[51] E. H. El Abdalaoui, M. El Machkouri, and A. Nogueira. A criterion of weak mixing property. In *École de Théorie Ergodique*, volume 20 of *Sémin. Congr.*, pages 105–111. Soc. Math. France, Paris, 2010.

[52] M. El Machkouri. Kahane-Khintchine inequalities and functional central limit theorem for stationary random fields. *Stoch. Proc. and Their Appl.*, 120 :285–299, 2002.

[53] M. El Machkouri. Nonparametric regression estimation for random fields in a fixed-design. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 10(1) :29–47, 2007.

[54] M. El Machkouri. Berry-Esseen's central limit theorem for non-causal linear processes in Hilbert spaces. *African Diaspora Journal of Mathematics*, 10(2) :1–6, 2010.

[55] M. El Machkouri. Asymptotic normality for the Parzen-Rosenblatt density estimator for strongly mixing random fields. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 14(1) :73–84, 2011.

[56] M. El Machkouri. On the asymptotic normality of frequency polygons for strongly mixing spatial processes. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 16(3) :193–206, 2013.

[57] M. El Machkouri. Kernel density estimation for stationary random fields. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 11(1) :259–279, 2014.

[58] M. El Machkouri, K. Es-Sebaiy, and I. Ouassou. On local linear regression for strongly mixing random fields. *J. Multivariate Anal.*, 156 :103–115, 2017.

[59] M. El Machkouri, K. Es-Sebaiy, and Y. Ouknine. Parameter estimation for the non-ergodic Ornstein-Uhlenbeck processes driven by Gaussian processes. *J. Korean Statist. Soc.*, 45(3) :329–341, 2016.

[60] M. El Machkouri and D. Giraudo. Orthomartingale-coboundary decomposition for stationary random fields. *Stoch. Dyn.*, 16(5) :1650017, 28, 2016.

[61] M. El Machkouri and L. Ouchti. Invariance principles for standard-normalized and self-normalized random fields. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 2 :177–194, 2006.

[62] M. El Machkouri and L. Ouchti. Exact convergence rates in the central limit theorem for a class of martingales. *Bernoulli*, 13(4) :981–999, 2007.

[63] M. El Machkouri and R. Stoica. Asymptotic normality of kernel estimates in a regression model for random fields. *J. Nonparametr. Stat.*, 22(8) :955–971, 2010.

[64] M. El Machkouri and D. Volný. Contre-exemple dans le théorème central limite fonctionnel pour les champs aléatoires réels. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 2 :325–337, 2003.

[65] M. El Machkouri and D. Volný. On the local and central limit theorems for martingale difference sequences. *Stochastics and Dynamics*, 4(2) :1–21, 2004.

[66] M. El Machkouri, D. Volný, and W. B. Wu. A central limit theorem for stationary random fields. *Stochastic Process. Appl.*, 123(1) :1–14, 2013.

[67] C. G. Esseen. On the Liapunov limit of error in the theory of probability. *Ark. Math. Astr. och Fysik*, 28A :1–19, 1942.

[68] J. Fan and I. Gijbels. *Local polynomial modelling and its applications*, volume 66 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London, 1996.

[69] X. Fan. Exact rates of convergence in some martingale central limit theorems. arXiv :1608.08887v8, 2017.

[70] T. Gasser and H-G. Müller. Estimating regression functions and their derivatives by the kernel method. *Scand. J. Statist.*, 11(3) :171–185, 1984.

[71] D. Giraudo. Invariance principle via orthomartingale approximation. arXiv :1702.08288, 2017.

[72] B. V. Gnedenko. O lokal'noi predel'noi teoreme teorii veroyatnostei. *Uspehi matem. nauk*, 3 :187–194, 1948. (On the local limit theorem in the theory of probability).

[73] B. V. Gnedenko. Lokal'naya predel'naya teorema dlya plotnostei. *Dokl. AN SSSR*, 95(1) :5–7, 1954. (The local limit theorem for densities).

[74] M. I. Gordin. The central limit theorem for stationary processes. *Soviet Math.Dokl.*, pages 1174–1176, 1969.

[75] M. I. Gordin. Abstracts of communications, International conference on probability theory, Vilnius, 1973.

[76] M. I. Gordin. Martingale-co-boundary representation for a class of stationary random fields. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 364(Veroyatnost i Statistika. 14.2) :88–108, 236, 2009.

[77] M. I. Gordin and B. A. Lif˘ sic. Central limit theorem for stationary Markov processes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 239(4) :766–767, 1978.

[78] X. Guyon and S. Richardson. Vitesse de convergence du théorème de la limite centrale pour des champs faiblement dépendants. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 66(2) :297–314, 1984.

[79] O. Häggström. On the central limit theorem for geometrically ergodic Markov chains. *Probab. Theory Related Fields*, 132(1) :74–82, 2005.

[80] G. Halász. Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 28(3-4) :389–395, 1976.

[81] P. Hall. On iterated logarithm laws for linear arrays and nonparametric regression estimators. *Ann. Probab.*, 19(2) :740–757, 1991.

[82] P. Hall and J.D. Hart. Nonparametric regression with long-range dependence. *Stoch. Proc. and Their Appl.*, 36 :339–351, 1990.

[83] P. Hall and C. C. Heyde. *Martingale limit theory and its application.* Academic Press, New York, 1980.

[84] M. Hallin, Z. Lu, and L.T. Tran. Density estimation for spatial linear processes. *Bernoulli*, 7 :657–668, 2001.

[85] M. Hallin, Z. Lu, and L.T. Tran. Local linear spatial regression. *Ann. Statist.*, 32(6) :2469–2500, 2004.

[86] P. R. Halmos. *Lectures on ergodic theory.* Chelsea Publishing Co., New York, 1960.

[87] L. Heinrich. Asymptotic behaviour of an empirical nearest-neighbour distance function for stationary Poisson cluster process. *Mathematische Nachrichten*, 136 :131–148, 1988.

[88] C. C. Heyde. On the central limit theorem and iterated logarithm law for stationary processes. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 12 :1–8, 1975.

[89] Y. Hu and D. Nualart. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Statist. Probab. Lett.*, 80(11-12) :1030–1038, 2010.

[90] Y. Hu, D. Nualart, and H. Zhou. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes of general hurst parameter. 2017. To appear in Stat. Inference Stoch. Processes.

[91] I. A. Ibragimov. Some limit theorems for stationary processes. *Theory Probab. Appl.*, 7 :349–382, 1962.

[92] I. A. Ibragimov. A central limit theorem for a class of dependent random variables. *Theory Probab. Appl.*, 8 :83–89, 1963.

[93] A. Jakubowski. Principle of conditioning revisited. *Demonstratio Math.*, 45(2) :325–336, 2012.

[94] M. Jara, T. Komorowski, and S. Olla. Limit theorems for additive functionals of a Markov chain. *Ann. Appl. Probab.*, 19(6) :2270–2300, 2009.

[95] N. Jenish and I. R. Prucha. Central limit theorems and uniform laws of large numbers for arrays of random fields. *J. Econometrics*, 150(1) :86–98, 2009.

[96] A. G. Kachurovskiĭ. Rates of convergence in ergodic theorems. *Uspekhi Mat. Nauk*, 51(4(310)) :73–124, 1996.

[97] J. P. Kahane. *Some Random Series of Functions.* Cambridge University Press, 1985.

[98] A. B. Katok and A. M. Stepin. Approximation of ergodic dynamical systems by periodic transformations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 171 :1268–1271, 1966.

[99] D. Khoshnevisan. *Multiparameter processes.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002.

[100] A. N. Kolmogorov and Ju. A. Rozanov. On a strong mixing condition for stationary Gaussian processes. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 5 :222–227, 1960.

[101] I. Kontoyiannis and S. P. Meyn. Geometric ergodicity and the spectral gap of non-reversible Markov chains. *Probab. Theory Related Fields*, 154(1-2) :327–339, 2012.

[102] M. A. Krasnosel'skii and Y. B. Rutickii. *Convex Functions and Orlicz Spaces.* P. Noordhoff LTD-Groningen-The Netherlands, 1961.

[103] J. Kuelbs. The invariance principle for a lattice of random variables. *Ann. Math. Statist.*, 39 :382–389, 1968.

[104] Y. A. Kutoyants. *Statistical inference for ergodic diffusion processes.* Springer Series in Statistics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2004.

[105] P. S. Laplace. *Théorie analytique des probabilités.* Paris, 1812.

[106] V. P. Leonov. On the dispersion of time means of a stationary stochastic process. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 6 :93–101, 1961.

[107] E. Lesigne and D. Volný. Large deviations for martingales. *Stochastic Processes and Their Applications*, 96 :143–159, 2001.

[108] J. W. Lindeberg. Eine neue Herleitung des Exponentialgezetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 15 :211–225, 1922.

[109] R. S. Liptser and A. N. Shiryaev. *Statistics of random processes. II*, volume 6 of *Applications of Mathematics (New York).* Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 2001. Applications, Translated from the 1974 Russian original by A. B. Aries, Stochastic Modelling and Applied Probability.

[110] Z. Lu and X. Chen. Spatial nonparametric regression estimation : Non-isotropic case. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English series*, 18 :641–656, 2002.

[111] Z. Lu and X. Chen. Spatial kernel regression estimation : weak consistency. *Statist. Probab. Lett.*, 68 :125–136, 2004.

[112] Z. Lu and P. Cheng. Distribution-free strong consistency for nonparametric kernel regression involving nonlinear time series. *J. Statist. Plann. Inference*, 65(1) :67–86, 1997.

[113] A. M. Lyapunov. Sur un théorème du calcul des probabilités. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 132 :126–128, 1901.

[114] A. L. Maltz. On the central limit theorem for nonuniform ϕ-mixing random fields. *J. Theoret. Probab.*, 12(3) :643–660, 1999.

[115] E. Masry and J. Fan. Local polynomial estimation of regression functions for mixing processes. *Scand. J. Statist.*, 24(2) :165–179, 1997.

[116] D. L. McLeish. A maximal inequality and dependent strong laws. *Ann. Probab.*, 3(5) :829–839, 1975.

[117] V. V. Menon, B. Prasad, and R. S. Singh. Nonparametric recursive estimates of a probability density function and its derivatives. *J. Statist. Plann. Inference*, 9(1) :73–82, 1984.

[118] F. Merlevède, M. Peligrad, and S. Utev. Sharp conditions for the CLT of linear processes in a Hilbert space. *J. Theoret. Probab.*, 10(3) :681–693, 1997.

[119] A. Mokkadem, M. Pelletier, and Y. Slaoui. Revisiting Révész's stochastic approximation method for the estimation of a regression function. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 6 :63–114, 2009.

[120] A. Mokkadem, M. Pelletier, and Y. Slaoui. The stochastic approximation method for the estimation of a multivariate probability density. *J. Statist. Plann. Inference*, 139(7) :2459–2478, 2009.

[121] È. A. Nadaraya. On non-parametric estimates of density functions and regression. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 10 :199–203, 1965.

[122] B. Nahapetian and A. N. Petrosian. Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Series A-I Math.*, 17 :105–110, 1992.

[123] B. S. Nakhapetyan. An approach to the proof of limit theorems for dependent random variables. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 32(3) :589–594, 1987.

[124] C. C. Neaderhouser. Limit theorems for multiply indexed mixing random variables, with application to Gibbs random fields. *Ann. Probability*, 6(2) :207–215, 1978.

[125] C. C. Neaderhouser. Some limit theorems for random fields. *Comm. Math. Phys.*, 61(3) :293–305, 1978.

[126] E. Parzen. On the estimation of a probability density and the mode. *Ann. Math. Statist.*, 33 :1965–1976, 1962.

[127] V. Paulauskas. On Beveridge-Nelson decomposition and limit theorems for linear random fields. *J. Multivariate Anal.*, 101(3) :621–639, 2010.

[128] M. Peligrad and N. Zhang. On the normal approximation for random fields via martingale methods. *Stochastic Process. Appl.*, 128(4) :1333–1346, 2018.

[129] G. Perera. Geometry of $\mathbf{Z}^d$ and the central limit theorem for weakly dependent random fields. *J. Theoret. Probab.*, 10(3) :581–603, 1997.

[130] G. Peskir. Best constants in Kahane-Khintchine inequalities in Orlicz spaces. *J. Multivariate Anal.*, 45 :183–216, 1993.

[131] K. Petersen. *Ergodic theory*. Cambridge University Press, 1983.

[132] A. Rényi. On stable sequences of events. *Sankhya Ser. A*, 25 :189–206, 1963.

[133] P. Révész. Robbins-Monro procedure in a Hilbert space and its application in the theory of learning processes. I. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 8 :391–398, 1973.

[134] E. Rio. Covariance inequalities for strongly mixing processes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 29 :587–597, 1993.

[135] P. M. Robinson. Nonparametric estimators for time series. *J. Time Ser. Anal.*, 4(3) :185–207, 1983.

[136] M. Rosenblatt. A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 42 :43–47, 1956.

[137] M. Rosenblatt. Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.*, 27 :832–837, 1956.

[138] G. G. Roussas. Nonparametric estimation in mixing sequences of random variables. *J. Statist. Plann. Inference*, 18(2) :135–149, 1988.

[139] W. J. Rugh. *Nonlinear system theory*. Johns Hopkins Series in Information Sciences and Systems. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Md., 1981.

[140] D. W. Scott. Frequency polygons : theory and application. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 80(390) :348–354, 1985.

[141] R. J. Serfling. Contributions to central limit theory for dependent variables. *Ann. Math. Statist.*, 39(4) :1158–1175, 1968.

[142] B.W. Silverman. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall, London, 1986.

[143] Ch. Stein. A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 2 :583–602, 1972.

[144] C. J. Stone. Consistent nonparametric regression. *Ann. Statist.*, 5(4) :595–645, 1977. With discussion and a reply by the author.

[145] C. J. Stone. Optimal global rates of convergence for nonparametric regression. *Annal. of Statist.*, 10(4) :1043–1053, 1982.

[146] L.T. Tran. Kernel density estimation on random fields. *J. Multivariate Anal.*, 34 :37–53, 1990.

[147] A. B. Tsybakov. Recurrent estimation of the mode of a multidimensional distribution. *Problemy Peredachi Informatsii*, 26(1) :38–45, 1990.

[148] A. W. Van der Vaart and J. A. Wellner. *Weak convergence and empirical processes with applications to statistics*. Springer, 1996.

[149] D. Volný. Approximating martingales and the central limit theorem for strictly stationary processes. *Stochastic Processes and Their Applications*, 44 :41–74, 1993.

[150] D. Volný. A central limit theorem for fields of martingale differences. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 353(12) :1159–1163, 2015.

[151] D. Volný. Martingale-coboundary representation for stationary random fields. *Stoch. Dyn.*, 18(2) :1850011, 18, 2018.

[152] D. Volný. On limit theorems for fields of martingale-differences. arXiv :1803.09100, 2018.

[153] D. Volný and Y. Wang. An invariance principle for stationary random fields under Hannan's condition. *Stochastic Process. Appl.*, 124(12) :4012–4029, 2014.

[154] Y. Wang and M. Woodroofe. On the asymptotic normality of kernel density estimators for causal linear random fields. *J. Multivariate Anal.*, 123 :201–213, 2014.

[155] G. S. Watson. Smooth regression analysis. *Sankhyā Ser. A*, 26 :359–372, 1964.

[156] W. Wertz. Recursive and sequential density estimation. In *Sequential methods in statistics*, volume 16 of *Banach Center Publ.*, pages 515–544. PWN, Warsaw, 1985.

[157] M. J. Wichura. Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters. *Ann. Math. Statist.*, 40 :681–687, 1969.

[158] C. T. Wolverton and T. J. Wagner. Recursive estimates of probability densities. *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.*, 5 :307–308, 1969.

[159] W. B. Wu. Nonlinear system theory : another look at dependence. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 102(40) :14150–14154 (electronic), 2005.

[160] W.B. Wu and J. Mielniczuk. Kernel density estimation for linear processes. *Ann. Statist.*, 30 :1441–1459, 2002.

[161] L. C. Young. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Math.*, 67(1) :251–282, 1936.

[162] N. Ziegler. Functional central limit theorems for triangular arrays of function-indexed processes under uniformly integrable entropy conditions. *J. Multivariate Anal.*, 62 :233–272, 1997.