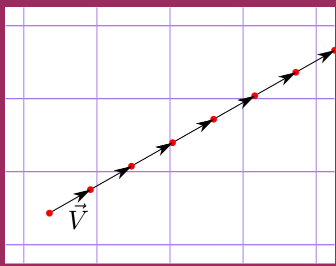
Théorie ergodique

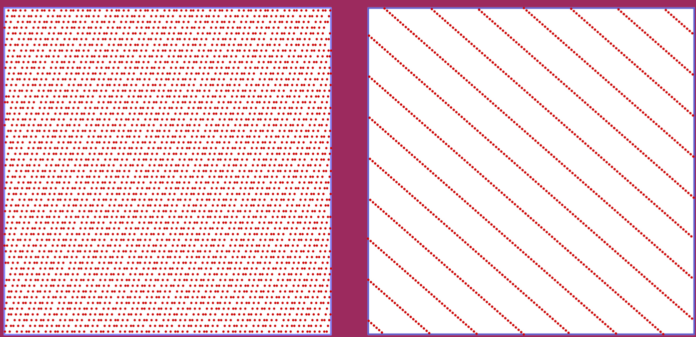
L'évolution d'un système dans le temps est souvent modélisée par une transformation T agissant sur l'ensemble des états du système : si x représente l'état du système à un instant donné, $T(x)$ est l'état du système à l'instant suivant.

La ***théorie ergodique*** s'intéresse au cas où la ***probabilité*** que le système soit dans un état donné est ***invariante*** au cours du temps.
Dans les exemples cités ici, cela correspond à la conservation de l'aire par les transformations considérées.

Translation sur le carré

Dans un plan quadrillé, on considère une translation de vecteur fixé. On ne regarde que la position d'un point dans la cellule carrée qui le contient.





Être ou ne pas être *ergodique*

Suivant le vecteur de translation, les images successives d'un point vont soit se répartir uniformément sur tout le carré (cas ***ergodique****, à gauche), ou bien se concentrer sur ce que l'on appelle une* ***composante ergodique*** *du système (à droite).*

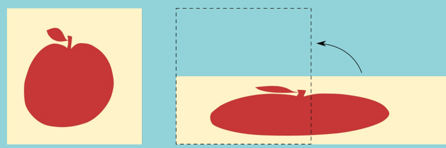
Suites produites par un système dynamique

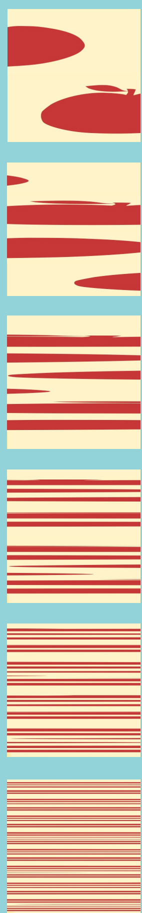
On représente une observation faite sur l'état du système par une fonction f. On étudie la suite des observations relevées au cours du temps :

$$f(x), f\big(T(x)\big), f\big(T^2(x)\big), \ldots$$

Un des objectifs de la théorie ergodique est de classifier les sytèmes dynamiques selon les propriétés des suites qu'ils produisent.

La transformation du boulanger





On décrit cette transformation du carré, qui évoque le pétrissage de la pâte par le boulanger, en 3 étapes :
1- on étale le carré pour obtenir un rectangle de largeur double mais de hauteur moitié,
2- on coupe ce rectangle en deux,
3- on place le deuxième morceau au-dessus du premier pour reconstituer le carré initial.

Le mélange

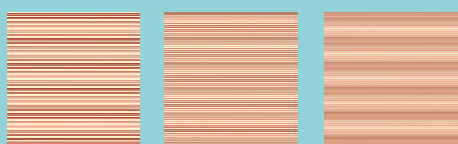
Après un grand nombre d'itérations, l'image d'une partie initialement localisée se répartit uniformément dans le carré : on dit que la transformation du boulanger est ***mélangeante****.*

Pile ou face

Définissons $f(x)=0$ si x est dans la moitié gauche du carré, $f(x)=1$ sinon.
Pour un point x choisi au hasard dans le carré, la suite

$$f(x), f\big(T(x)\big), f\big(T^2(x)\big), \ldots$$

se comporte comme une suite de tirages à pile ou face.



Le théorème ergodique

$$\frac{f(x)+f\big(T(x)\big)+\cdots+f\big(T^{N-1}(x)\big)}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{\mu\text{-p.s.}} \int_X f\,d\mu$$

Dans le cas ergodique, avec probabilité 1 la ***moyenne temporelle*** *de la suite des observations coïncide avec la* ***moyenne spatiale*** *de la fonction sur l'ensemble des états.*
Un cas particulier de ce théorème est la ***loi des grands nombres****, en théorie des probabilités, selon laquelle dans une longue suite de tirages à pile ou face, environ la moitié tombent sur face.*

LMRS
Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
cnrs dépasser les frontières
UNIVERSITÉ DE ROUEN NORMANDIE