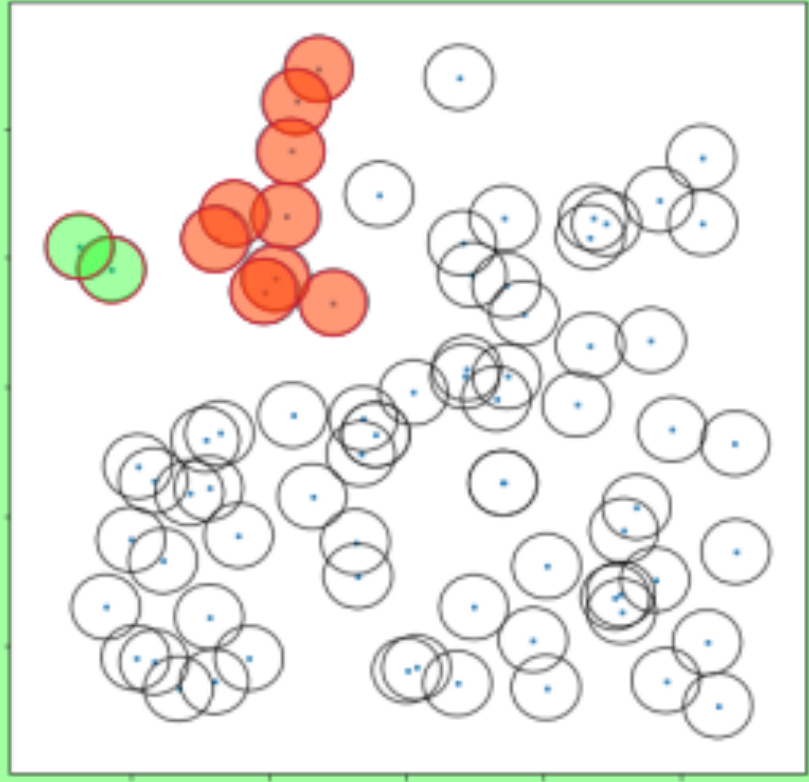


Modèle booléen et configurations exceptionnelles

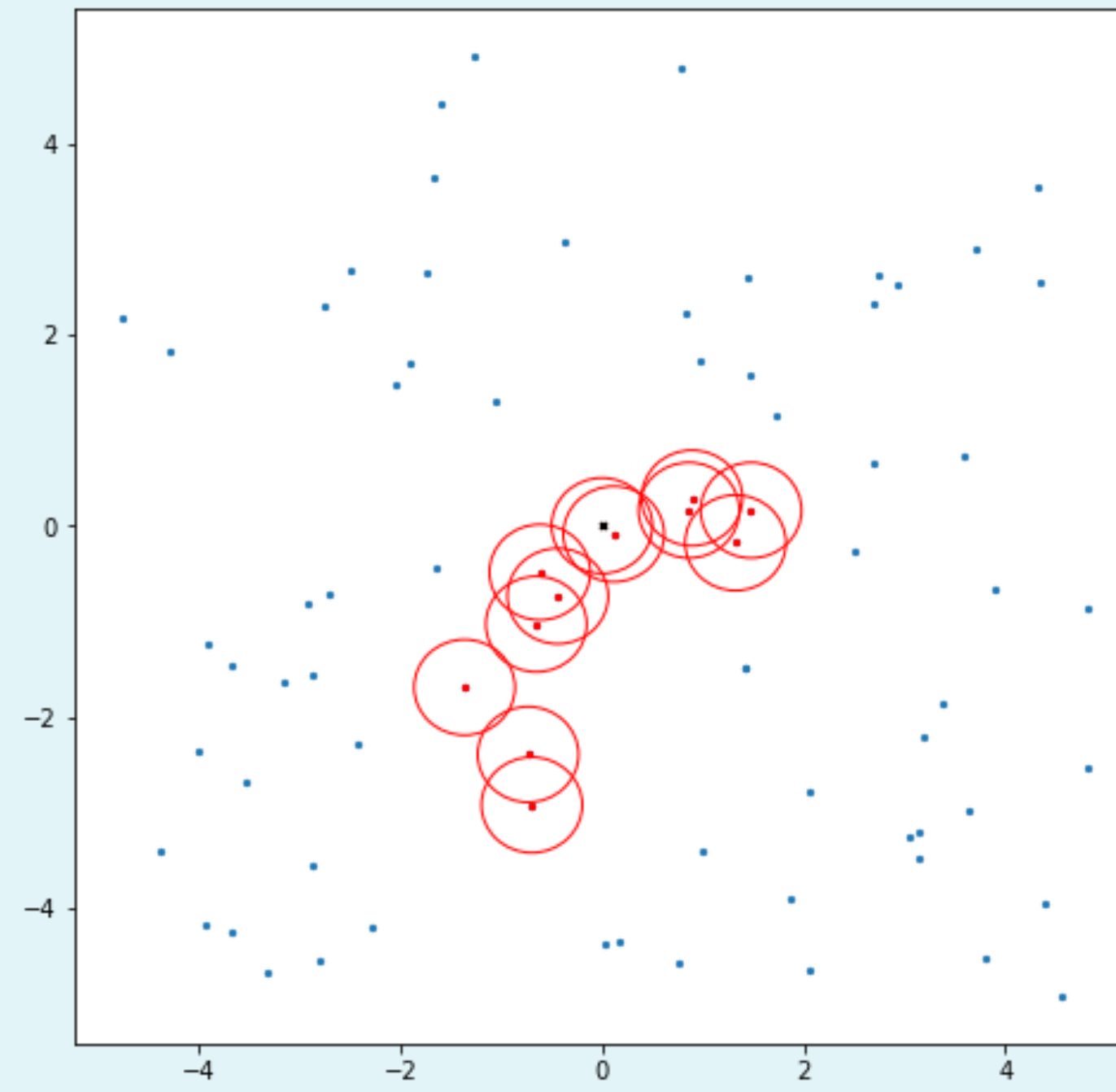
Audrey Chaudron
Pierre Calka
Contact : audrey.chaudron@univ-rouen.fr

Intuitivement, pour avoir un modèle booléen, on "jette" une infinité de points aléatoirement dans \mathbb{R}^d et on met autour de chaque point une boule de rayon $\frac{1}{2}$.



Ce modèle a été introduit par E. N. Gilbert en 1961 dans [G61] pour approcher de manière simplifiée la couverture dans une zone géographique d'un réseau de transmission radio. Plus précisément, on lance les points selon un processus de Poisson homogène d'intensité ρ , noté $\text{pp}(\rho)$. En particulier le nombre de points moyen par unité de volume sera égal à ρ .

Dans le modèle booléen, il s'agit d'étudier la composante connexe typique de la réunion de boules. Par la technique de Palm, ceci revient à étudier la composante connexe contenant l'origine lorsque celle-ci est ajoutée au $\text{pp}(\rho)$, que l'on note C .

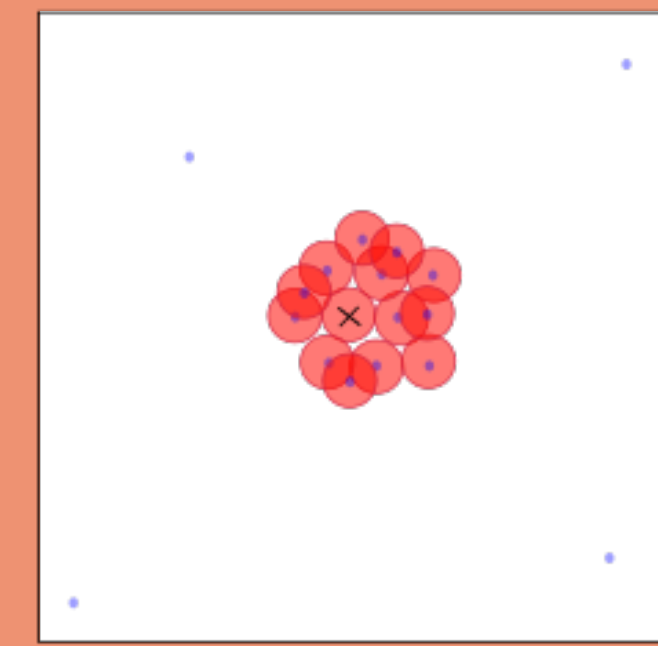


$C :=$ l'ensemble des points rouges et le point noir (l'origine).

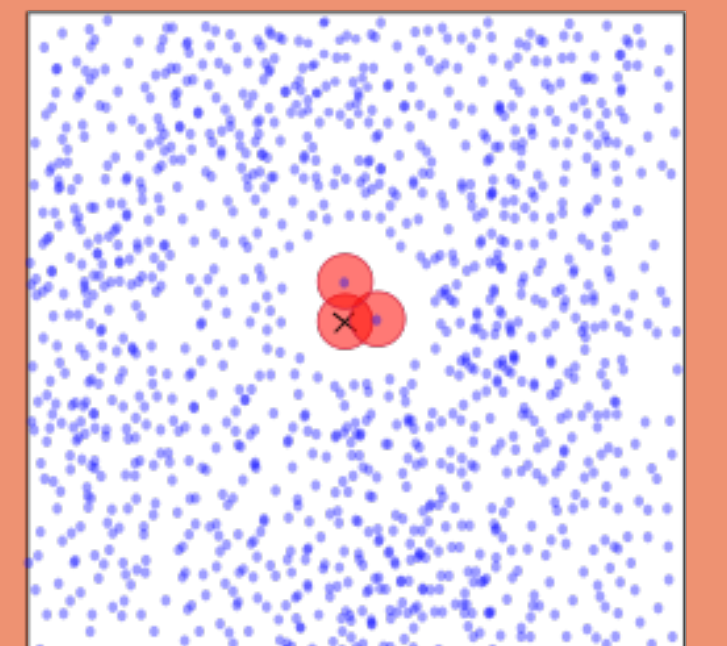
On souhaite répondre aux deux objectifs suivants :

- (O1) estimer la probabilité qu'il y ait k points connectés à 0 pour un $\text{pp}(\rho)$,
- (O2) comprendre la géométrie sous-jacente, c'est-à-dire conditionnellement à la réalisation de cet événement, déterminer l'agencement privilégié des points de C .

On s'intéresse à des événements dont la probabilité est faible.



$\rho \rightarrow 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$



$\rho \rightarrow +\infty$ et $k \in \mathbb{N}^*$

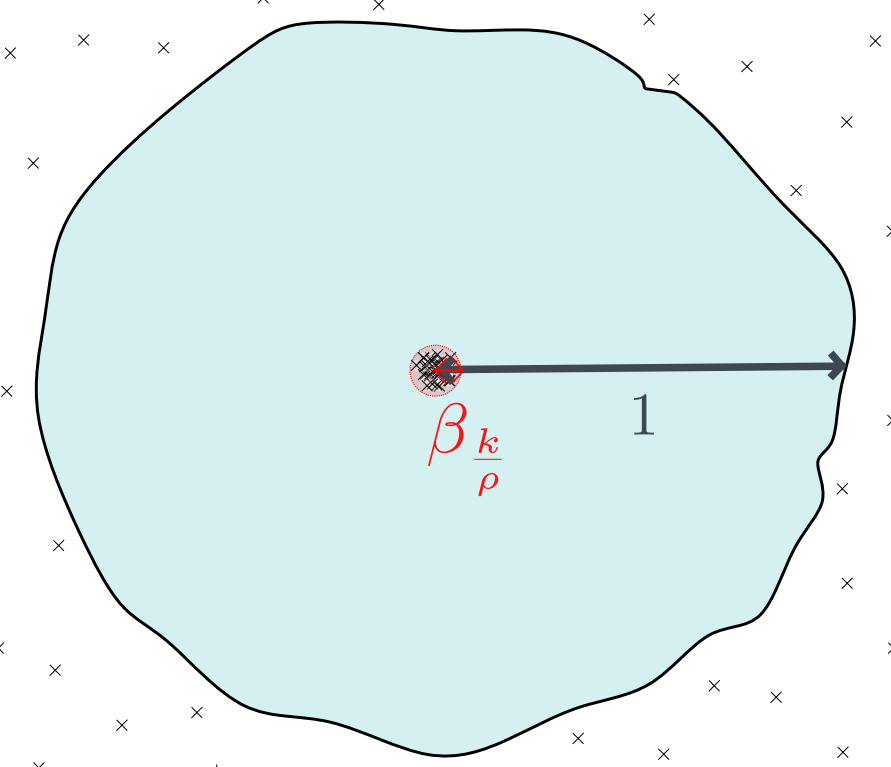
Cadre euclidien : $\rho \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty, \frac{k}{\rho} \rightarrow 0$

Dans [A93], K. Alexander répond aux objectifs (O1) et (O2) à grande intensité dans l'espace euclidien de dimension d .

$$(O1) \mathbb{P}_\rho(|C| = k+1) = e^{-(\rho|\mathbb{B}(0,1)|_d + (d-1)k \ln(\frac{\rho}{k}) + (d-1)k \ln(e|\mathbb{B}(0,1)|_d) + o(k))}$$

$$\text{où } |\mathbb{B}(0,1)|_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}.$$

(O2) Cond. à $|C| = k+1$, la forme limite en probabilité pour la distance de Hausdorff est la boule $\mathbb{B}(0, \beta_k)$ où $\beta_k \sim \frac{1}{|\mathbb{B}(0,1)|_d} \frac{k}{\rho}$.



Changement de régime ?

Changement de géométrie ?

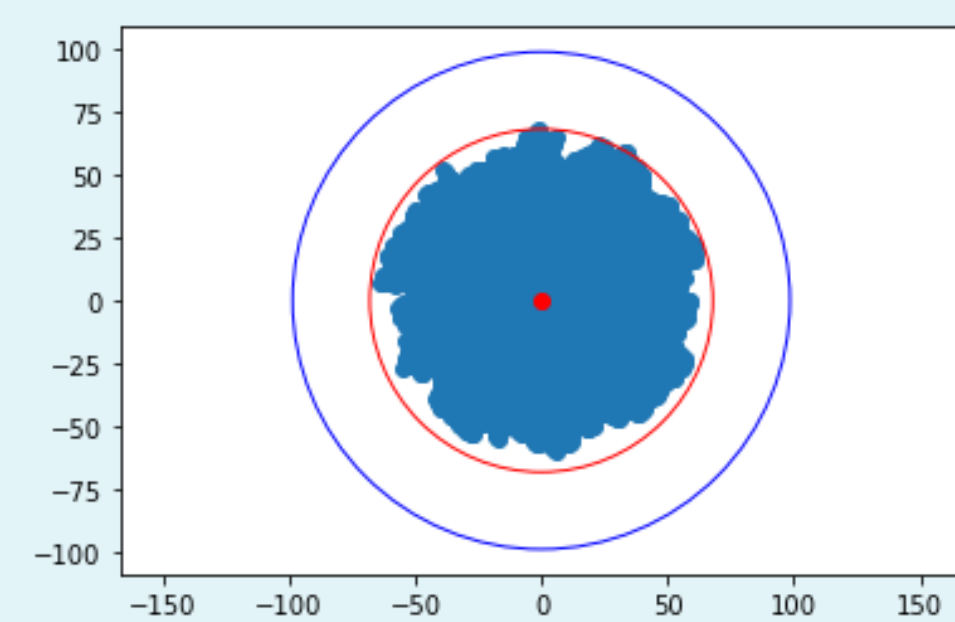
Cadre euclidien : $\rho \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty, k\rho \rightarrow 0$

Pour $(X_i)_{i=1,\dots,k} \sim \mathcal{U}(\mathbb{B}(0,k)) \perp\!\!\!\perp$

$$(O1) \mathbb{P}_\rho(|C| = k+1) \sim \frac{(\rho|\mathbb{B}(0,k)|_d)^k}{k!} \mathbb{P}(\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(X_i, \frac{1}{2}) \text{ connexe})$$

(O2) Exemple de simulation de l'évènement $\{\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(X_i, \frac{1}{2}) \text{ connexe}\}$ pour $k = 50000$:

Observation : si on obtient une composante connexe de $k+1$ points, tous les points sont dans $\mathbb{B}(0, R_c(k))$.



Conjectures (travail en cours) :

- $\mathbb{P}(\forall i \in [1, k] X_i \in \mathbb{B}(0, R_c(k)) \mid \cup_{i=0}^k \mathbb{B}(X_i, \frac{1}{2}) \text{ connexe}) \rightarrow 1$
- $\mathbb{P}(\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(X_i, \frac{1}{2}) \text{ connexe} \mid \forall i \in [1, k] X_i \in \mathbb{B}(0, R_c(k))) \rightarrow 1$

où $R_c(k) = c \left(\frac{k}{\ln(k)}\right)^{\frac{1}{d}}$, $\frac{3}{4} \leq c \leq 2$.

Idee de preuve : utiliser la formule de Mecke pour entamer l'objectif (O1), puis tirer profit de [C14], [P24] et [P03] pour prouver les conjectures pour (O2).

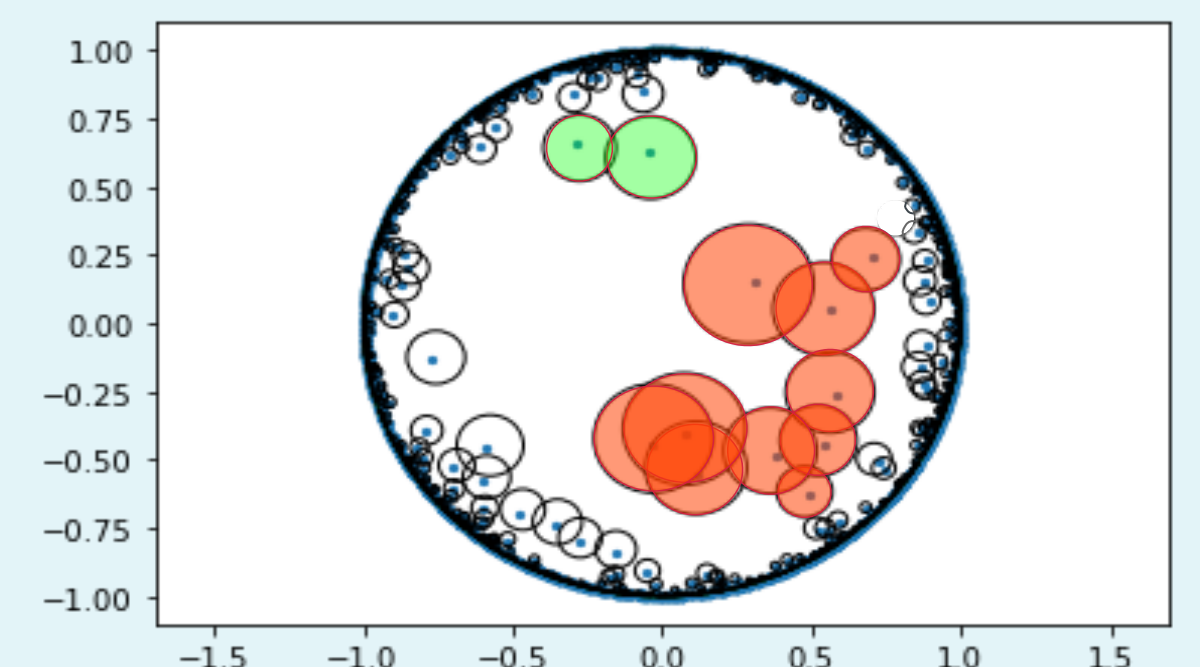
Cadre hyperbolique : $\rho \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty, \frac{k}{\rho} \rightarrow 0$

On se place dans le disque de Poincaré en dimension 2, $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}})$ où

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

$$\forall z \in \mathbb{D} \quad d_{\mathbb{D}}(z, z+dz) := \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

$$\forall R > 0 \quad \mathcal{A}_{\mathbb{D}}(\mathbb{B}_{\mathbb{D}}(0, R)) = 4\pi \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right).$$

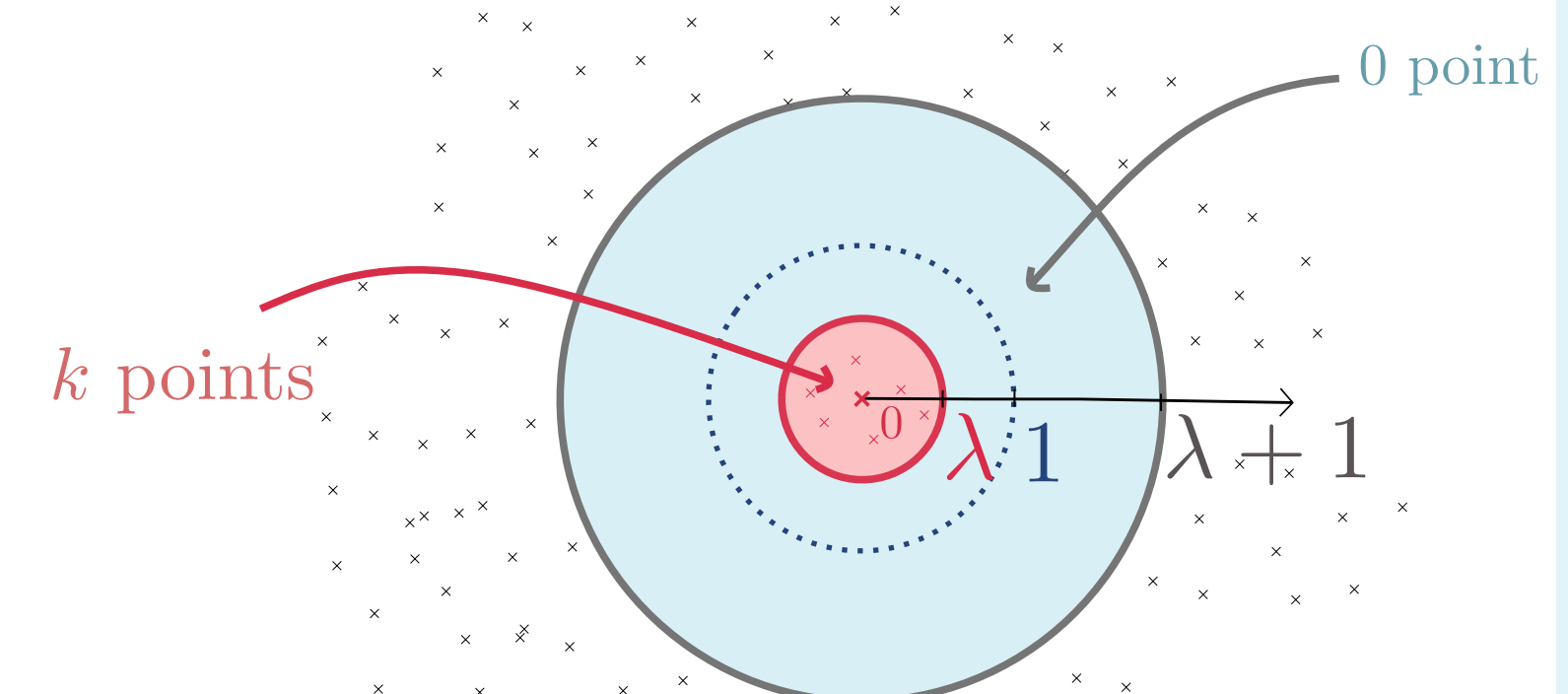


Conjectures (travail en cours) : $-(c_3\rho + k \ln(\frac{\rho}{k}) + k \ln(c_2) + o(k))$
(O1) $\mathbb{P}_\rho(|C| = k+1) = e$

(O2) Cond. à $|C| = k+1$, forme privilégiée serait $\mathbb{B}_{\mathbb{D}}(0, \lambda_{\frac{k}{\rho}})$

où $\lambda_{\frac{k}{\rho}} \sim c_1 \frac{k}{\rho}$.

Idee de preuve : adapter les outils de [A93] au cadre hyperbolique. Concernant la minoration, l'évènement illustré sur la figure suivante implique la réalisation de $\{|C| = k+1\}$ pour tout $0 < \lambda < 1$.



[G61] E. N. Gilbert. *Random plane networks*. Journal of the society for industrial and applied mathematics. vol 9. 1961.

[A93] K. Alexander. *Finite clusters in high-density continuous percolation: compression and sphericity*. Probability theory and related fields. vol 97. 1993.

[C14] P. Calka, N. Chenavier. *Extreme values for characteristic radii of a Poisson-Voronoi tessellation*. Extremes. vol 17. 2014.

[P24] M. Penrose, X. Yang. *Fluctuations of the connectivity threshold and largest nearest-neighbour link*. arXiv, 2024.

[P03] M. Penrose. *Random geometric graphs*. vol 5. 2003.