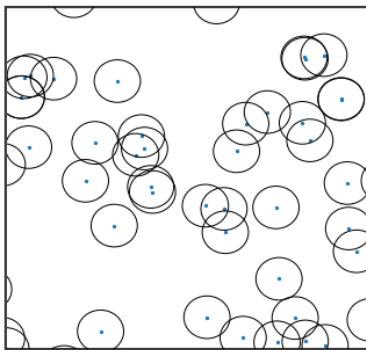


Configurations exceptionnelles d'un
recouvrement aléatoire à grande intensité

Audrey CHAUDRON
Directeur de thèse : Pierre CALKA

mercredi 8 octobre

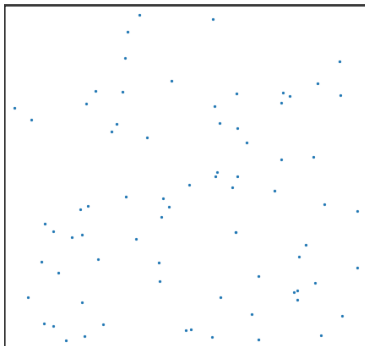
- 1 **Modèle : réunion de disques aléatoires**
- 2 Pause historique : résultats antérieurs et intuition
- 3 Nouveaux résultats : un point de vue différent
- 4 Travail en cours : lorsque le cardinal de la c.c. explose



E. N. Gilbert *Random plane networks*. Journal of the Society for industrial and applied mathematics. 1961.

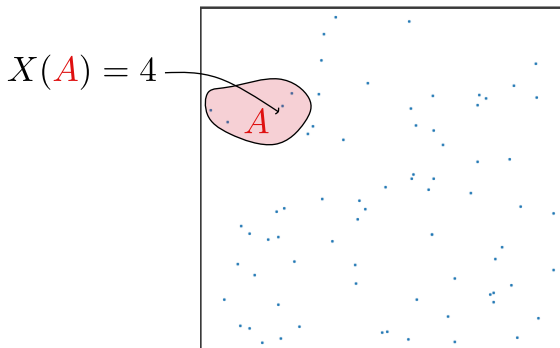
$$\lambda > 0$$

Processus de Poisson ponctuel homogène d'intensité λ



$$\lambda > 0$$

Processus de Poisson ponctuel homogène d'intensité λ

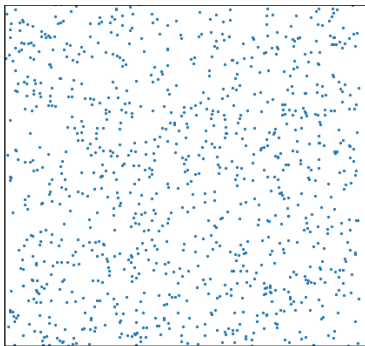


$$\lambda = 1$$

- indépendance des points dans des régions disjointes
- $X(A) \sim \text{Poisson}(\lambda |A|_d)$
 - $\hookrightarrow \mathbb{P}_\lambda(X(A) = 0) = e^{-\lambda |A|_d}$
 - $\hookrightarrow \mathbb{E}(X(A)) = \lambda |A|_d$

$$\lambda > 0$$

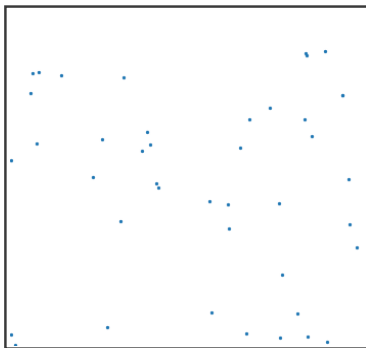
Processus de Poisson ponctuel homogène d'intensité λ



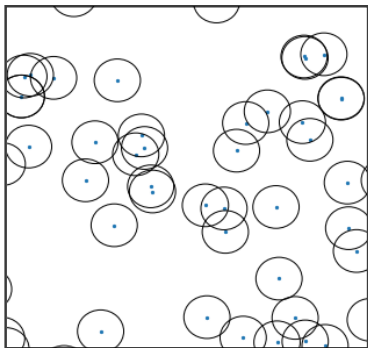
$$\lambda = 10$$

- indépendance des points dans des régions disjointes
- $X(A) \sim \text{Poisson}(\lambda |A|_d)$
 - $\hookrightarrow \mathbb{P}_\lambda(X(A) = 0) = e^{-\lambda |A|_d}$
 - $\hookrightarrow \mathbb{E}(X(A)) = \lambda |A|_d$

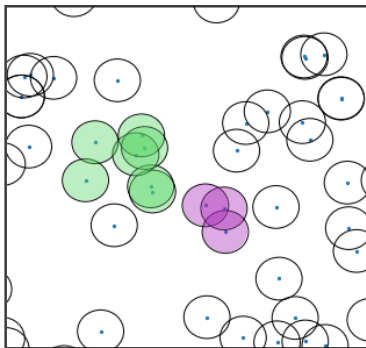
λ = nombre moyen de points du processus par u.v.



λ = nombre moyen de points du processus par u.v.

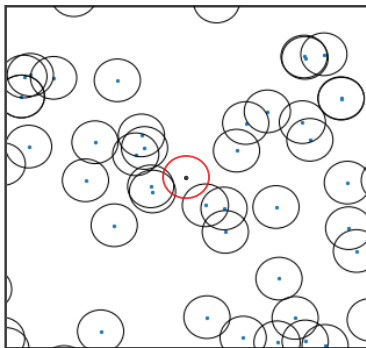


λ = nombre moyen de points du processus par u.v.



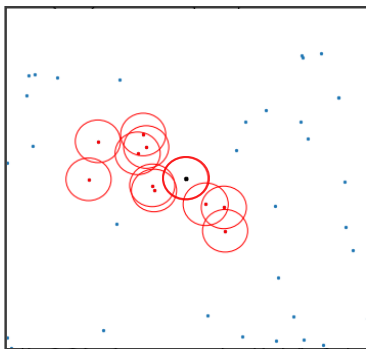
$\mathcal{C} :=$ composante connexe typique au sens de Palm

λ = nombre moyen de points du processus par u.v.



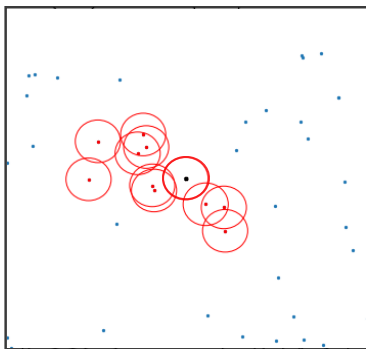
$\mathcal{C} :=$ composante connexe typique au sens de Palm

λ = nombre moyen de points du processus par u.v.



$\mathcal{C} :=$ composante connexe typique au sens de Palm
 $:= \{0\} \cup \{\text{Points du processus connectés à } 0\}$

λ = nombre moyen de points du processus par u.v.




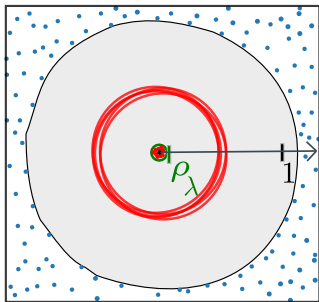
$\mathcal{C} :=$ composante connexe typique au sens de Palm
 $:= \{0\} \cup \{\text{Points du processus connectés à } 0\}$

Questions

- $\mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1) = ?$
- Sachant que $\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1$, forme privilégiée ?

- 1 Modèle : réunion de disques aléatoires
- 2 Pause historique : résultats antérieurs et intuition**
- 3 Nouveaux résultats : un point de vue différent
- 4 Travail en cours : lorsque le cardinal de la c.c. explose

-  K. Alexander. *Finite clusters in high-density continuous percolation : **compression** and sphericity*. 1993.




Pour $k \geq 1$ et $\lambda \rightarrow +\infty$

[Alexander, 1993]

Sachant que $\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1$,
avec haute probabilité

$$\mathcal{C} \subset \mathbb{B}(0, \rho_\lambda) \text{ et } \rho_\lambda \sim (\text{cste}) \frac{k}{\lambda}.$$

-  M. Penrose, X. Yang. *On k -clusters of high-intensity random geometric graphs*. 2023.

- 1 Modèle : réunion de disques aléatoires
- 2 Pause historique : résultats antérieurs et intuition
- 3 Nouveaux résultats : un point de vue différent**
- 4 Travail en cours : lorsque le cardinal de la c.c. explose

$$\kappa_d := |\mathbb{B}(0, 1)|_d$$

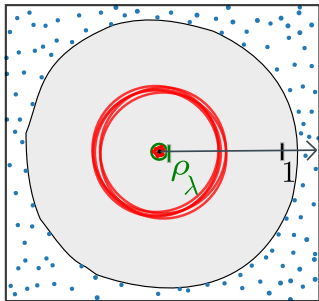
Développement à deux termes de la probabilité [Calka, C.]

Pour $k \geq 1$ et $\lambda \rightarrow +\infty$

$$k! \lambda^{k(d-1)} e^{\lambda \kappa_d} \mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k+1) = \alpha_{k+1} - \frac{1}{\lambda} \beta_{k+1} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

- $\alpha_{k+1} = \int_{(\mathbb{R}^d)^k} e^{-\kappa_{d-1} V_1(0, \mathbf{z})} d\mathbf{z}$
- $\beta_{k+1} = \int_{(\mathbb{R}^d)^k} e^{-\kappa_{d-1} V_1(0, \mathbf{z})} \kappa_{d-2} V_2(0, \mathbf{z}) d\mathbf{z}$

avec $V_1(0, \mathbf{z})$ et $V_2(0, \mathbf{z})$ volumes intrinsèques de $\text{conv}(0, \mathbf{z})$.



En particulier

$$\mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k+1) \sim \frac{\alpha_{k+1}}{k!} \frac{e^{-\lambda \kappa_d}}{\lambda^{k(d-1)}}$$

Sachant $\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1$, on note $\mathbf{Y}_\lambda^{(k)}$ le vecteur ordonné des points de $(\lambda\mathcal{C}) \setminus \{0\}$.

Pour $k \geq 1$ et $\lambda \rightarrow +\infty$

Loi limite et vitesse de convergence [Calka, C.]

$$d_{TV}(\mathbf{Y}_\lambda^{(k)}, \mathbf{Z}^{(k)}) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Approximation [Calka, C.]

$$d_{TV}(\mathbf{Y}_\lambda^{(k)}, \mathbf{Z}_\lambda^{(k)}) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

- $\mathbf{Z}^{(k)}$ le vecteur ordonné de densité $\propto e^{-\kappa_{d-1}V_1(0,\cdot)}$
- $\mathbf{Z}_\lambda^{(k)}$ le vecteur ordonné de densité $\propto \left(1 - \frac{\kappa_{d-2}V_2(0,\cdot)}{\lambda}\right) e^{-\kappa_{d-1}V_1(0,\cdot)}$

$$d_{TV}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) := \sup \{ \mathbb{E}(f(\mathbf{Y})) - \mathbb{E}(f(\mathbf{X})) \mid f : (\mathbb{R}^d)^k \rightarrow [-1, 1] \text{ mesurable} \}$$

Développement à deux termes de la probabilité [Calka, C.]

$$k! \lambda^{k(d-1)} e^{\lambda \kappa_d} \mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k+1) = \alpha_{k+1} - \frac{1}{\lambda} \beta_{k+1} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

Fil rouge de la preuve :

- ① Mise sous forme intégrale de la probabilité
- ② Renormalisation avec changement de variable calibré $z = \lambda x$
- ③ Approximation de l'intégrande

Développement à deux termes de la probabilité [Calka, C.]

$$k! \lambda^{k(d-1)} e^{\lambda \kappa_d} \mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1) = \alpha_{k+1} - \frac{1}{\lambda} \beta_{k+1} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

Fil rouge de la preuve :

- ① Mise sous forme intégrale de la probabilité

$$\mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1) = \frac{\lambda^k}{k!} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \mathbb{1}_{\{0, \mathbf{x} \text{ sont connectés}\}} e^{-\lambda |\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(x_i, 1)|_d} d\mathbf{x}$$

- ② Renormalisation avec changement de variable calibré $z = \lambda x$

- ③ Approximation de l'intégrande

Développement à deux termes de la probabilité [Calka, C.]

$$k! \lambda^{k(d-1)} e^{\lambda \kappa_d} \mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k+1) = \alpha_{k+1} - \frac{1}{\lambda} \beta_{k+1} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

Fil rouge de la preuve :

① Mise sous forme intégrale de la probabilité

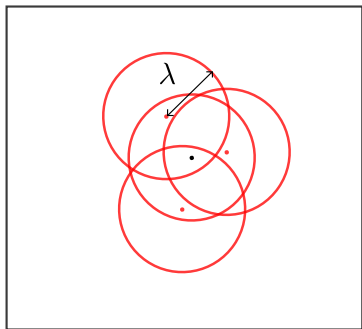
$$\mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k+1) = \frac{\lambda^k}{k!} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \mathbb{1}_{\{0, \mathbf{x} \text{ sont connectés}\}} e^{-\lambda |\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(x_i, 1)|_d} d\mathbf{x}$$

② Renormalisation avec changement de variable calibré $z = \lambda x$

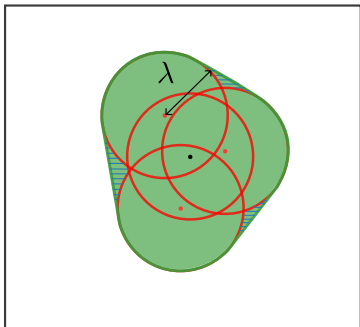
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k+1) \\ &= \left(k! \lambda^{k(d-1)} e^{\lambda \kappa_d}\right)^{-1} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \mathbb{1}_{\{0, \frac{z}{\lambda} \text{ s. c.}\}} e^{-\frac{1}{\lambda^{d-1}} (|\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda)|_d - |\mathbb{B}(0, \lambda)|_d)} dz \end{aligned}$$

③ Approximation de l'intégrande

Étape 3 : développer $\left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d$ quand $\mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$

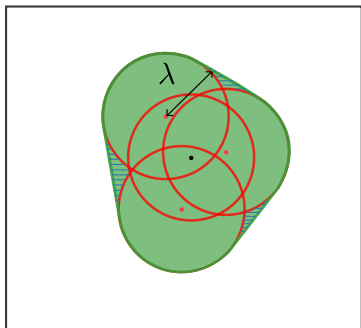


Étape 3 : développer $\left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d$ quand $\mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$

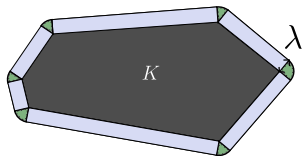


$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d \\ &= \left| \text{conv} \left(\bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right) \right|_d - \left| \text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k) \right|_d \end{aligned}$$

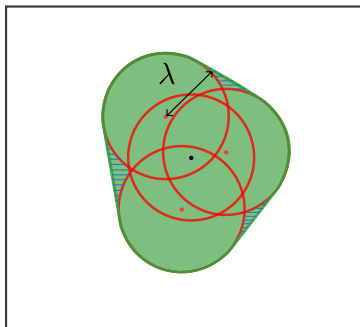
Étape 3 : développer $\left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d$ quand $\mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$



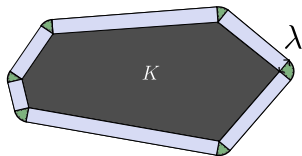
$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d \\ &= \left| \text{conv} \left(\bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right) \right|_d - \left| \text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k) \right|_d \end{aligned}$$



Étape 3 : développer $\left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d$ quand $\mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$



$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d \\ &= \left| \text{conv} \left(\bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right) \right|_d - \left| \text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k) \right|_d \end{aligned}$$

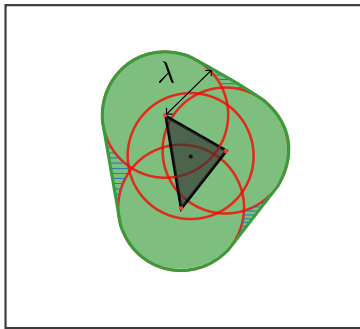


Formule de Steiner–Minkowski

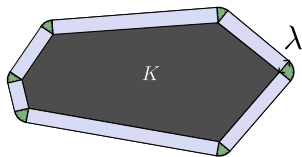
$$\forall \lambda > 0 \quad |K^\lambda|_d = \sum_{m=0}^d \lambda^{d-m} \kappa_{d-m} V_m(K)$$

où $V_m(K)$ est le m -ème volume intrinsèque d'un compact convexe K de \mathbb{R}^d .

Étape 3 : développer $\left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d$ quand $\mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$



$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d \\ &= \left| \text{conv} \left(\bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right) \right|_d - |\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d \end{aligned}$$

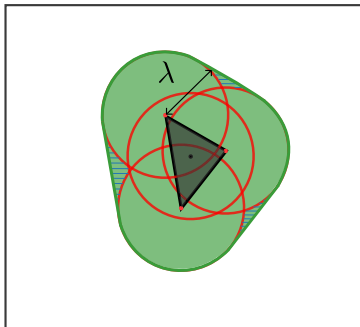


Formule de Steiner–Minkowski

$$\forall \lambda > 0 \quad |K^\lambda|_d = \sum_{m=0}^d \lambda^{d-m} \kappa_{d-m} V_m(K)$$

où $V_m(K)$ est le m -ème volume intrinsèque d'un compact convexe K de \mathbb{R}^d .

Étape 3 : développer $\left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d$ quand $\mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$



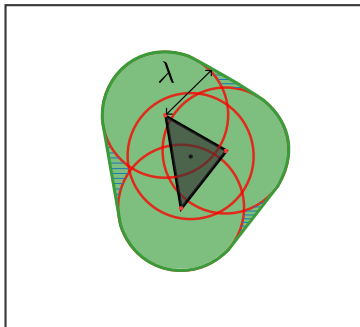
$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d \\ &= \left| \text{conv} \left(\bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right) \right|_d - |\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d \\ &= \left| \text{conv}(0, \mathbf{z})^\lambda \right|_d - |\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d \end{aligned}$$

Formule de Steiner–Minkowski

$$\forall \lambda > 0 \quad |K^\lambda|_d = \sum_{m=0}^d \lambda^{d-m} \kappa_{d-m} V_m(K)$$

où $V_m(K)$ est le m -ème volume intrinsèque d'un compact convexe K de \mathbb{R}^d .

Étape 3 : développer $\left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d$ quand $\mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$



$$\begin{aligned}
 & \left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d \\
 &= \left| \text{conv} \left(\bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right) \right|_d - |\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d \\
 &= \left| \text{conv}(0, \mathbf{z})^\lambda \right|_d - |\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d \\
 &= \sum_{m=0}^d \lambda^{d-m} \kappa_{d-m} V_m(\text{conv}(0, \mathbf{z})) \\
 &\quad - |\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d
 \end{aligned}$$

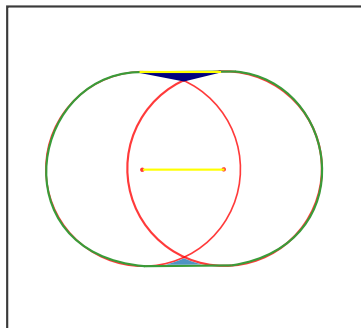
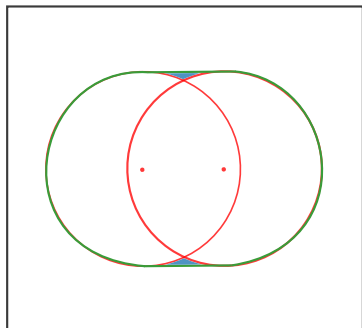
Formule de Steiner–Minkowski

$$\forall \lambda > 0 \quad |K^\lambda|_d = \sum_{m=0}^d \lambda^{d-m} \kappa_{d-m} V_m(K)$$

où $V_m(K)$ est le m -ème volume intrinsèque d'un compact convexe K de \mathbb{R}^d .

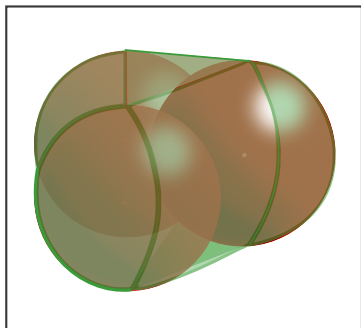
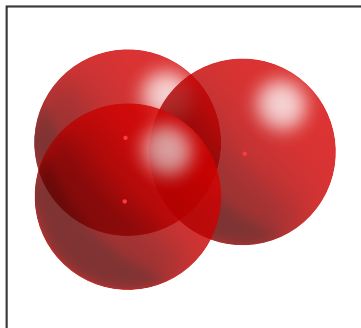
Étape 3 : développer $\left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d$ quand $\mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$

$$|\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d := |\text{conv} \left(\bigcup_{j=0}^k \mathbb{B}(z_j, \lambda) \right) \setminus \bigcup_{j=0}^k \mathbb{B}(z_j, \lambda)|_d$$



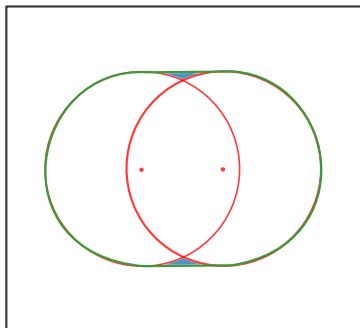
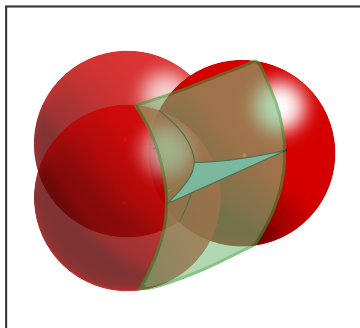
Étape 3 : développer $\left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d$ quand $\mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$

$$|\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d := |\text{conv} \left(\bigcup_{j=0}^k \mathbb{B}(z_j, \lambda) \right) \setminus \bigcup_{j=0}^k \mathbb{B}(z_j, \lambda)|_d$$



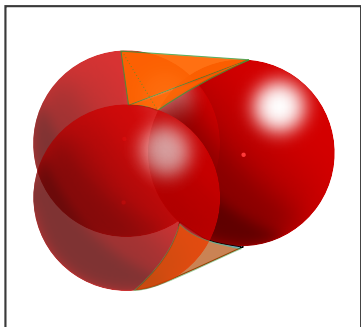
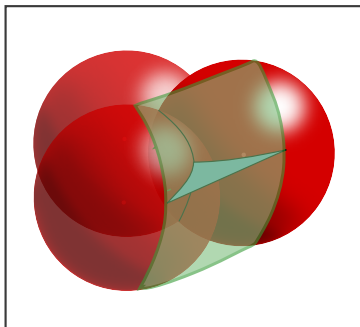
Étape 3 : développer $\left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d$ quand $\mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$

$$|\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d := |\text{conv} \left(\bigcup_{j=0}^k \mathbb{B}(z_j, \lambda) \right) \setminus \bigcup_{j=0}^k \mathbb{B}(z_j, \lambda)|_d$$



Étape 3 : développer $\left| \bigcup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda) \right|_d$ quand $\mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$

$$|\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d := |\text{conv} \left(\bigcup_{j=0}^k \mathbb{B}(z_j, \lambda) \right) \setminus \bigcup_{j=0}^k \mathbb{B}(z_j, \lambda)|_d$$



$$\exists \lambda_0 > 0 \exists M_{d,k} > 0 \forall \lambda \geq \lambda_0 \forall \mathbf{z} \in \mathbb{B}(0, \lambda^{1/4})^k$$

$$|\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d \leq M_{d,k} \|\mathbf{z}\|^3 \lambda^{d-3}$$

L'objet de l'étape 1 et de l'étape 2 était de montrer

$$\mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1)$$

$$= \frac{\lambda^{k(1-d)}}{k!} e^{-\lambda|\mathbb{B}(0,1)|_d} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \mathbb{1}_{\{0, \frac{\mathbf{z}}{\lambda} \text{ s. c.}\}} e^{-\frac{1}{\lambda^{d-1}} (|\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(\mathbf{z}_i, \lambda)|_d - |\mathbb{B}(0, \lambda)|_d)} d\mathbf{z}.$$

Puis, par l'étape 3

$$\int_{\mathbb{B}(0, \lambda^{\frac{1}{4}})^k} \mathbb{1}_{\{0, \frac{\mathbf{z}}{\lambda} \text{ s. c.}\}} e^{-\frac{1}{\lambda^{d-1}} (|\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(\mathbf{z}_i, \lambda)|_d - |\mathbb{B}(0, \lambda)|_d)} d\mathbf{z}$$
$$= \int_{\mathbb{B}(0, \lambda^{\frac{1}{4}})^k} e^{-\frac{1}{\lambda^{d-1}} \left(\sum_{m=1}^d \lambda^{d-m} \kappa_{d-m} V_m(0, \mathbf{z}) - |\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d \right)} d\mathbf{z}$$

L'objet de l'étape 1 et de l'étape 2 était de montrer

$$\mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1)$$

$$= \frac{\lambda^{k(1-d)}}{k!} e^{-\lambda|\mathbb{B}(0,1)|_d} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \mathbb{1}_{\{0, \frac{z}{\lambda} \text{ s. c.}\}} e^{-\frac{1}{\lambda^{d-1}} (|\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda)|_d - |\mathbb{B}(0, \lambda)|_d)} d\mathbf{z}.$$

Puis, par l'étape 3

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{B}(0, \lambda^{\frac{1}{4}})^k} \mathbb{1}_{\{0, \frac{z}{\lambda} \text{ s. c.}\}} e^{-\frac{1}{\lambda^{d-1}} (|\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(z_i, \lambda)|_d - |\mathbb{B}(0, \lambda)|_d)} d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{B}(0, \lambda^{\frac{1}{4}})^k} e^{-\frac{1}{\lambda^{d-1}} \left(\sum_{m=1}^d \lambda^{d-m} \kappa_{d-m} V_m(0, \mathbf{z}) - |\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d \right)} d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{B}(0, \lambda^{\frac{1}{4}})^k} e^{-\kappa_{d-1} V_1(0, \mathbf{z}) - \sum_{m=2}^d \frac{1}{\lambda^{m-1}} \kappa_{d-m} V_m(0, \mathbf{z})} \times e^{\frac{|\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d}{\lambda^{d-1}}} d\mathbf{z} \end{aligned}$$

L'objet de l'étape 1 et de l'étape 2 était de montrer

$$\mathbb{P}_\lambda(\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1)$$

$$= \frac{\lambda^{k(1-d)}}{k!} e^{-\lambda|\mathbb{B}(0,1)|_d} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \mathbb{1}_{\{0, \frac{\mathbf{z}}{\lambda} \text{ s. c.}\}} e^{-\frac{1}{\lambda^{d-1}} (|\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(\mathbf{z}_i, \lambda)|_d - |\mathbb{B}(0, \lambda)|_d)} d\mathbf{z}.$$

Puis, par l'étape 3

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{B}(0, \lambda^{\frac{1}{4}})^k} \mathbb{1}_{\{0, \frac{\mathbf{z}}{\lambda} \text{ s. c.}\}} e^{-\frac{1}{\lambda^{d-1}} (|\cup_{i=0}^k \mathbb{B}(\mathbf{z}_i, \lambda)|_d - |\mathbb{B}(0, \lambda)|_d)} d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{B}(0, \lambda^{\frac{1}{4}})^k} e^{-\frac{1}{\lambda^{d-1}} \left(\sum_{m=1}^d \lambda^{d-m} \kappa_{d-m} V_m(0, \mathbf{z}) - |\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d \right)} d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{B}(0, \lambda^{\frac{1}{4}})^k} e^{-\kappa_{d-1} V_1(0, \mathbf{z}) - \sum_{m=2}^d \frac{1}{\lambda^{m-1}} \kappa_{d-m} V_m(0, \mathbf{z})} \times e^{\frac{|\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d}{\lambda^{d-1}}} d\mathbf{z} \\ & \quad \downarrow \frac{|\text{Trous}_d(\mathbf{z}, \lambda, k)|_d}{\lambda^{d-1}} \leq M_{d,k} \|\mathbf{z}\|^3 \frac{1}{\lambda^2} \\ & \stackrel{\lambda \rightarrow +\infty}{=} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} e^{-\kappa_{d-1} V_1(0, \mathbf{z})} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \kappa_{d-2} V_2(0, \mathbf{z}) \right) d\mathbf{z} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

- 1 Modèle : réunion de disques aléatoires
- 2 Pause historique : résultats antérieurs et intuition
- 3 Nouveaux résultats : un point de vue différent
- 4 Travail en cours : lorsque le cardinal de la c.c. explose



K. Alexander. *Finite clusters in high-density continuous percolation : compression and **sphericity***. 1993.

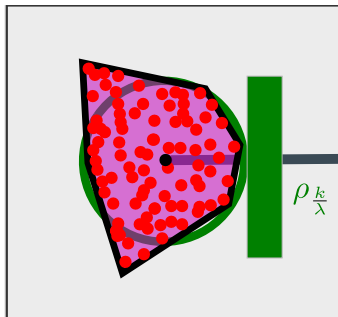
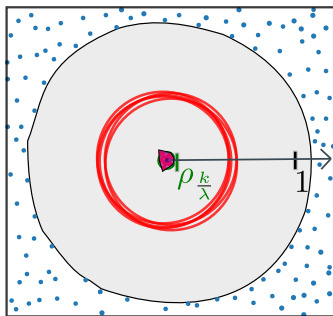
Pour $k \rightarrow +\infty$ et $\lambda \rightarrow +\infty$ tels que $k = o(\lambda)$

[Alexander, 1993]

Sachant que $\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1$,

$$d_H\left(\text{conv}(\mathcal{C}), \mathbb{B}(0, \rho_{\frac{k}{\lambda}})\right) \rightarrow 0 \text{ en probabilité}$$

où $\rho_{\frac{k}{\lambda}} \sim (\text{cste}) \frac{k}{\lambda}$.



Équivalent de la probabilité [Calka, C.]

Pour $k \rightarrow +\infty$ et $\lambda \rightarrow +\infty$ tels que $k = o(\sqrt{\lambda})$, on a pour $\varepsilon > 0$

$$k! \lambda^{k(d-1)} e^{\lambda \kappa_d} \mathbb{P}_\lambda (\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1) \sim \left(\frac{k}{\kappa_d} \right)^{dk} e^{-dk} \kappa_d^k \times \mathcal{J}_{k,\varepsilon}$$

Rappel : Pour $k \geq 1$ et $\lambda \rightarrow +\infty$

$$k! \lambda^{k(d-1)} e^{\lambda \kappa_d} \mathbb{P}_\lambda (\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1) \sim \int_{(\mathbb{R}^d)^k} e^{-\kappa_d - 1} V_1(0, \mathbf{z}) \, d\mathbf{z}$$

Équivalent de la probabilité [Calka, C.]

Pour $k \rightarrow +\infty$ et $\lambda \rightarrow +\infty$ tels que $k = o(\sqrt{\lambda})$, on a pour $\varepsilon > 0$

$$k! \lambda^{k(d-1)} e^{\lambda \kappa_d} \mathbb{P}_\lambda (\text{Card}(\mathcal{C}) = k + 1) \sim \left(\frac{k}{\kappa_d}\right)^{dk} e^{-dk} \kappa_d^k \times \mathcal{J}_{k,\varepsilon}$$

avec

$$\mathcal{J}_{k,\varepsilon} := (1 + \varepsilon)^{-dk} \mathbb{E} \left(e^{k(V_1(\mathbb{B}(0,1)) - V_1(0, \mathbf{Z}^{(k)})) \frac{\kappa_d - 1}{\kappa_d} - \varepsilon k V_1(0, \mathbf{Z}^{(k)}) \frac{\kappa_d - 1}{\kappa_d}} \right)$$

où pour $\mathbf{Z}^{(k)} = (Z_1, \dots, Z_k)$ à entrées i.i.d et de loi $\mathcal{U}(\mathbb{B}(0, 1))$.

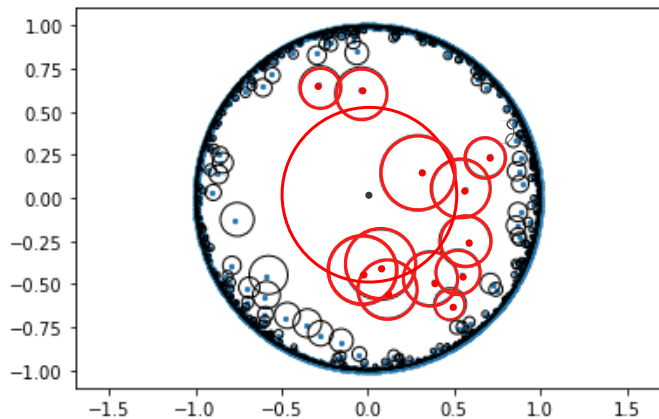
Perspectives : estimer $\mathcal{J}_{k,\varepsilon}$ en utilisant

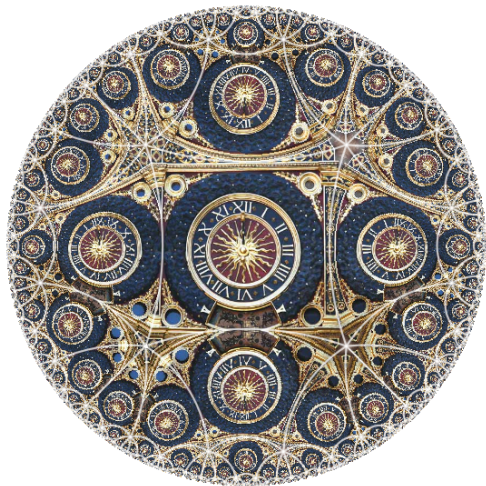
$$\mathbb{E} (V_1(\mathbb{B}(0, 1)) - V_1(\text{conv}(\mathcal{P}_k \cap \mathbb{B}(0, 1)))) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} (\text{cste}) k^{-\frac{2}{d+1}}.$$



R. Schneider, J.A. Wieacker. *Random polytopes in a convex body*. 1980.

Disque de Poincaré : $\lambda \rightarrow +\infty$ et $k \in \mathbb{N}^*$





Merci pour votre attention !