

**Question de cours**

(lemme de Cesàro) Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle ou complexe. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k.$$

Montrer que si  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ , avec  $\ell$  un réel, alors  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ . On dit que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge au sens de Cesàro.

**Exercice 1**

1. On considère la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_n = (-1)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que cette suite diverge.
2. La réciproque du Lemme de Cesàro est-elle vraie ? Justifiez.

**Exercice 2**

1. Montrer que la suite  $(x_n)$  définie par  $x_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$  est divergente.
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$  est un entier pair.
3. En déduire que la suite  $(\sin((3 + \sqrt{5})^n \pi))$  converge et déterminer sa limite.

Commentaire :

**Question de cours**

Unicité de la limite pour les suites convergentes.

**Exercice 1**

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels.

1. On suppose que les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers la même limite. Prouver que la suite  $(u_n)$  est convergente.
2. On suppose que  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  divergent vers  $+\infty$ . Prouver que  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

**Exercice 2**

1. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Montrer que si  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$  alors  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ .
2. En considérant la suite définie par  $x_n = n(1 + (-1)^n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , démontrer que la réciproque de la question 1. de cet exercice est fausse.

Commentaire :

**Question de cours**

Somme de deux suites convergentes.

**Exercice 1**

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1.  $u_n = \frac{\sin(n) + 3 \cos(n^2)}{\sqrt{n}},$

2.  $u_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)},$

3.  $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}.$

**Exercice 2**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $0 \leq u_n \leq 1$ ,  $0 \leq v_n \leq 1$  et  $u_n v_n \rightarrow 1$ . Que pouvez-vous dire des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ ? On proposera deux démonstrations : une par l'absurde et une par un raisonnement direct.

Commentaire :

## Colle 9 – exercices bonus

### Question de cours

Caractérisation séquentielle de la densité.

### Exercice

Soit  $\alpha > 0$  et  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}$ .

1. Démontrer que si  $\alpha > 1$  alors  $u_n \rightarrow 0$ .
2. Démontrer que si  $\alpha < 1$ , alors  $u_n \rightarrow +\infty$ .
3. Démontrer que, pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x).$$

4. En déduire que  $u_n \rightarrow \ln 2$ .

### Exercice

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

1. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
2. Démontrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

3. Démontrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

4. (En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.) pas encore au programme