

Question de cours

Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.

Exercice 1

On munit \mathbb{R}^2 de la relation notée \prec définie par

$$(x, y) \prec (x', y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

1. Démontrer que \prec est une relation d'ordre sur \mathbb{R}^2 . L'ordre est-il total?
2. Le disque fermé de centre O et de rayon 1 a-t-il des majorants? Un plus grand élément? Une borne supérieure?

Exercice 2

1. Déterminer une bijection entre $\left\{\frac{1}{n}; n \geq 1\right\}$ et $\left\{\frac{1}{n}; n \geq 2\right\}$.
2. En déduire une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1[$.

Commentaire :

Question de cours

L'ensemble des classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur E est une partition de E .

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction

$$g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], \quad g(x) = f(x)$$

est une bijection.

Exercice 2

Montrer que la relation R définie sur \mathbb{R} par :

$$xRy \iff xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans \mathbb{R} , le nombre d'éléments de la classe de x modulo R .

Commentaire :

Question de cours

Inclusions vérifiées par $f(f^{-1}(B))$ et $f^{-1}(f(A))$ pour $f : E \rightarrow F$ une application et $A \in \mathcal{P}(E), B \in \mathcal{P}(F)$.

Exercice 1

1. Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

(a) $E = \mathbb{Z}$ et

$$xRy \iff x = -y.$$

(b) $E = \mathbb{R}$ et

$$xRy \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$$

2. Quelles sont, parmi les exemples précédents, les relations d'ordre et les relations d'équivalence ?

Exercice 2

1. L'application

$$k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

est-elle injective, surjective, bijective ?

2. Changer les ensembles de départ et/ou d'arrivée afin que (la restriction de) k devienne bijective et préciser sa fonction réciproque.

Commentaire :

Colle 8 – exercices bonus

Question de cours

Composition d'injections. Composition de surjections.

Exercice 1 (S1 ou S3)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que f est bijective en exhibant sa fonction réciproque.

Exercice 2

Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour tout $A \subseteq E$, on a

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)},$$

où \overline{A} désigne le complémentaire de A .

Exercice 3

Peut-on trouver une application strictement croissante qui ne soit pas injective ?

Exercice 4

1. Peut-on trouver des parties A et B de E telles que $f : E \rightarrow F$ ne vérifie pas $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?
2. Même question pour une partie A de E telle que $A \neq f^{-1}(f(A))$.
3. Même question pour une partie A de E telle que $f(\overline{A}) \neq \overline{f(A)}$.