

Question de cours

Calcul d'une primitive de arccos.

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

Exercice 2

1. Démontrer par récurrence que si $m, n \in \mathbb{N}$ sont tels que $m > n$, on a

$$\int_0^\pi \cos^n(x) \cos(mx) dx = 0.$$

2. En déduire que $\int_0^\pi \cos^n(x) \cos(nx) dx = \frac{\pi}{2^n}$.

Commentaire :

Question de cours

Calcul des intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$ pair.

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles

1. $y'' - 3y' + 2y = 1$,
2. $y'' + 9y = x + 1$, $y(0) = 0$.

Exercice 2

1. Calculer une primitive de $\cos(x)e^{-2x}$ et de $\sin(x)e^{-2x}$.
2. En déduire les solutions de l'équation différentielles suivantes $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$.

Commentaire :

Question de cours

Résolution générale de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ pour $a \in C^0(I, K)$.

Exercice 1

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$

2. $x \mapsto \frac{3x + 2}{x^2 + x + 1}$

3. $x \mapsto \frac{2x + 1}{x^2 + x - 3}$

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = \sin(x)^2$.

Commentaire :

Colle 7 – exercices bonus

Question de cours

Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$.

Exercice

On cherche à résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire? Qu'est-ce qui change par rapport au cours?
2. **Analyse.** Soit y une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* . Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
 - (a) Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
 - (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).
 - (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
 - (d) En déduire une formule pour y .
3. **Synthèse.** Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Exercice

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et vérifiant, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,

$$f(s+t) = f(s)f(t).$$

Exercice

Soient $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

admet une unique solution impaire.