Colle 5 – Sujet 1 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{signe}(x)\,\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 1

À partir de la somme des racines 5-ièmes de l'unité, calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 2

1. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\sqrt{1-x^2} \leq x$?
2. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}\,e^{\arcsin(x)}$. Par exemple, si la question se pose : variations, asymptote(s), tangente(s) horizontale(s) ou verticale(s).

Commentaire :

Colle 5 – Sujet 2 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Calcul de primitives de :

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2x+3}{x^2 - 5x + 6}.$$

Exercice 1

Soit a un nombre complexe de module 1, et $z_1, \ldots, z_n$ les racines de l'équation $z^n = a$. Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont $(1+z_1)^n, \ldots, (1+z_n)^n$ sont alignés.

Exercice 2

Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.
2. Déterminer la limite de $S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$

Commentaire :

Colle 5 – Sujet 3 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Limites usuelles en 0 pour sin, cos et tan.

Exercice 1

Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$.

1. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.
2. En plaçant $z+z'$ et $1+zz'$ sur un dessin, retrouver géométriquement le fait que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n(x) = \cos\Big(n \arccos x\Big) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{\sin\Big(n \arccos x\Big)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Prouver que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

Commentaire :

Colle 5 – exercices bonus

Question de cours

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leq |x|$.

Exercice

On cherche à déterminer tous les réels t tels que $\cos t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{4}[$. On notera cette solution t_0 dans la suite.
2. Calculer $\cos(2t_0)$ puis démontrer que $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$.
3. En déduire la valeur de t_0.
4. Résoudre l'équation.