

## Question de cours

$$\text{Calcul de } S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

**Exercice 1**

- Écrire sous forme trigonométrique
  - $\sin(x) + i \cos(x)$
  - $3ie^{i\frac{\pi}{6}}$ .
- Déterminer la forme algébrique de  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ .

**Exercice 2**

On cherche à déterminer tous les réels  $t$  tels que  $\cos t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ .

- Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{4}[$ . On notera cette solution  $t_0$  dans la suite.
- Calculer  $\cos(2t_0)$  puis démontrer que  $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$ .
- En déduire la valeur de  $t_0$ .
- Résoudre l'équation.

Commentaire :

**Question de cours**

Linéarisation de  $\cos^3 x$  et  $\sin^3 x$ .

**Exercice 1**

1. A partir de la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ , en déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .
2. A partir de l'écriture  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ , en déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .
3. A partir de deux réécritures de  $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ , en déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

**Exercice 2**

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes de module 1 tels que  $zz' \neq -1$ .

1. Démontrer que  $\frac{z+z'}{1+zz'}$  est réel, et préciser son module.
2. En plaçant  $z+z'$  et  $1+zz'$  sur un dessin, retrouver géométriquement le fait que  $\frac{z+z'}{1+zz'}$  est réel.

**Exercice 3**

Soit  $a$  un nombre complexe de module 1, et  $z_1, \dots, z_n$  les racines de l'équation  $z^n = a$ . Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont  $(1+z_1)^n, \dots, (1+z_n)^n$  sont alignés.

Commentaire :

**Question de cours**

Paramétrisation de  $U_n$  par les entiers de 0 à  $n - 1$ .

**Exercice 1**

1. Déterminer la forme algébrique de  $(2 + 2i)^6$ .
2. Écrire sous forme trigonométrique
  - (a)  $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$
  - (b)  $-2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

**Exercice 2**

À partir de la somme des racines 5-ièmes de l'unité, calculer  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

Commentaire :

## Colle 4 – exercices bonus

### Question de cours

1. Formule de Moivre
2. def d'un argument + prop sur l'argument d'un produit de deux nombres complexes et l'inverse d'un complexe.

### Exercice