Colle 3 – Sujet 1 Nom : ______ Prénom : ______

Questions de cours

Étude complète de la tangente hyperbolique.

Exercice 1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \dfrac{(3+5i)^2}{1-2i}$
2. $z_2 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{3+6i}{3-4i}$

Exercice 2

Soit

$$\mathbb{Z}[i] = \{\, a + ib \; ; \; a, b \in \mathbb{Z} \,\}.$$

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$, alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}[i] \backslash \{0\}$, $|\alpha| \geq 1$.
3. Trouver les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ avec $\alpha\beta = 1$.
4. Vérifier que, quel que soit $\omega \in \mathbb{C}$, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tel que
$$|\omega - \alpha| < 1.$$
Une illustration pourra aider.
5. Montrer que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$, il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant
$$\alpha = \beta q + r \quad \text{avec} \quad |r| < |\beta|.$$

Commentaire :

Colle 3 – Sujet 2 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Théorème des croissances comparées pour les logarithmes, puissances et exponentielles en $+\infty$.

Exercice 1

1. Calculer les racines carrées du nombre complexe $1 + 2\sqrt{2}\,i$ sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + iz - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Exercice 2

Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes tous non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

$$|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

Commentaire :

Colle 3 – Sujet 3 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Formule d'Al-Kashi et inégalité triangulaire pour le module.

Exercice 1

1. Simplifier l'expression : $y = \frac{\mathrm{ch}\,(\ln(x/2)) + \mathrm{sh}\,(\ln(x/2))}{x}$
2. Résoudre l'équation pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\mathrm{ch} x + \mathrm{sh} x = \frac{1}{\mathrm{sh} x} - \frac{1}{\mathrm{ch} x}$

Exercice 2

On dit qu'un entier naturel N est *somme de deux carrés* s'il existe deux entiers naturels a et b tels que

$$N = a^2 + b^2.$$

1. Prouver que, si N_1 et N_2 sont sommes de deux carrés, alors leur produit $N_1 N_2$ est aussi somme de deux carrés.
2. Démontrer que si N est somme de deux carrés, alors pour tout entier $p \geq 1$, N^p est somme de deux carrés.

Commentaire :

Colle 3 – bonus

Question de cours supplémentaire

Factorisation et résolution des équations $az^2 + bz + c = 0$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$.