

Question de cours

Caractérisation des bases en dimension finie.

Exercice 1

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x - y + 2z = 0\}.$$

1. Donner une base de F , une base de G , en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F et des vecteurs de la base de G trouvées en 1 est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 . Est-elle libre ?

Exercice 2

1. Dire si la famille de vecteurs suivante peut être complétée en une base de \mathbb{R}^4 . Si oui, le faire : (u, v, w) avec $u = (1, 0, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2, 3)$ et $w = (1, 2, 0, 3)$.
2. $\{P \in \mathbb{R}[X] ; P'(0) = 2\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 3

Les familles suivantes sont-elles libres dans l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?

1. $(\cos(x), \sin(x))$;
2. $(x, \sin(x), e^x)$;
3. $(x \mapsto |x - a|)_{a \in \mathbb{R}}$.

Commentaire :

Question de cours

Si F et G sont des s.e.v. de E , alors $F + G$ est le plus petit s.e.v. contenant F et G .

Exercice 1

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n dans lequel ils sont inclus ? Si oui, en déterminer une famille génératrice.

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\}$.

Exercice 2

Les familles suivantes sont-elles libres ...

1. dans \mathbb{R}^4 : (u, v, w, z) avec $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (5, 6, 7, 8)$, $w = (9, 10, 11, 12)$ et $z = (13, 14, 15, 16)$.
2. dans l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : $(\sin(2x), \sin(x), \cos(x))$.
3. dans l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : $(\cos(2x), \sin^2(x), \cos^2(x))$.

Exercice 3

Pour $E = \mathbb{R}^4$, dire si les familles de vecteurs suivantes peuvent être complétées en une base de E . Si oui, le faire : (u, v) avec $u = (1, -1, 1, -1)$ et $v = (1, 1, 1, 1)$.

Commentaire :

Question de cours

Formule de Grassmann.

Exercice 1

Les familles suivantes sont-elles libres ...

1. (u, v, w) avec $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 2, -3)$;
2. dans l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : $(\sin x, \cos x)$.

Exercice 2

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] ; P(0) = P(2)\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$;

Exercice 3

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] ; P(\alpha) = 0\}$. Démontrer que $B = \{(X - \alpha)X^k ; 0 \leq k \leq n - 1\}$ est une base de F . Quelle est la dimension de F ? Donner les coordonnées de $(X - \alpha)^n$ dans cette base.

Commentaire :

Colle 21 – exercices bonus

Question de cours

Caractérisation des sommes directes de deux s.e.v. par intersection.
Dimension des s.e.v. d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice

Soient F, G les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\},$$

$$G = \text{vect}\{(1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)\} \subset \mathbb{R}^4.$$

1. Calculer la dimension de F .
2. Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$.
3. Déterminer un supplémentaire de F .

Exercice

Dans \mathbb{R}^3 , on pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 2y - z = 0\},$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}.$$

1. Donner une base de F et une base de G .
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires, puis décomposer un élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans $F \oplus G$.