

**Question de cours**

$\text{Vect}(A)$  est le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $A$ .

**Exercice 1**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque sur  $\mathbb{R}$ .
2. En admettant qu'il existe, donner un développement limité de  $f^{-1}$  à l'ordre 3 en 0.

**Exercice 2**

Prouver qu'au voisinage de  $+\infty$ , la courbe représentative de la fonction suivante admet une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote :

$$f(x) = \frac{x \cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh(x) - 1}.$$

**Exercice 3**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$ .

1. Donner le tableau de variations de  $f$ . On précisera les limites aux bornes.
2. Démontrer que  $f$  admet au voisinage de  $+\infty$  un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

où  $a_0, a_1, a_2$  sont des réels que l'on précisera.

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f(x) = \frac{n+1}{n}$  admet une unique solution  $u_n > 0$ .
4. Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
5. Déterminer un équivalent de  $(u_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Commentaire :

**Question de cours**

Liberté d'une famille de polynômes de degrés échelonnés.

**Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}.$$

1. Donner un développement limité de  $f$  à l'ordre 3 en 0.
2. En déduire que la courbe représentative de  $f$  admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.
3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0.

**Exercice 2**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par

$$f(x) = 2 \tan x - x.$$

1. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque de classe  $C^\infty$ .
2. Justifier que  $f^{-1}$  est impaire.
3. Donner le développement limité de  $f^{-1}$  à l'ordre 6 en 0.

On rappelle que

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

**Exercice 3**

Prouver qu'au voisinage de  $+\infty$ , la courbe représentative de la fonction suivante admet une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote :

$$u(x) = x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right).$$

Commentaire :

**Question de cours**

Caractérisation des bases par les combinaisons linéaires.

**Exercice 1**

Prouver qu'au voisinage de  $+\infty$ , la courbe représentative de la fonction suivante admet une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote :

$$g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

**Exercice 2**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ . Dire parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

- a.  $x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n - 2 \ln(n)$
- b.  $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n}$
- c.  $x_n = n - \ln(n) + o(\sqrt{\ln n})$

**Exercice 3**

On considère, pour chaque entier  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $x + \ln(x) = n$ .

1. Démontrer que cette équation admet une unique solution  $x_n \in ]0, +\infty[$ , puis démontrer que la suite  $(x_n)$  est strictement croissante.
2. Démontrer que  $x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n$ .
3. Démontrer que  $x_n = n - \ln(n) + o(\ln(n))$ . On pourra poser  $a_n$  tel que  $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$ .
4. Démontrer que  $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ .

Commentaire :