# Colle 2 – Sujet 1 Nom : _______ Prénom : _______

## Question de cours

Résoudre l'équation fonctionnelle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = x + f(y).$$

## Exercice de TD

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$
2. Montrer que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$
3. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in ]-1,1[^2, \quad \frac{x+y}{1+xy} \in ]-1,1[.$$

## Exercice supplémentaire 1

1. Déterminer
$$\sup\Big\{ \inf\{\, |x-y| \ ;\ y \in [0,1]\} \ ;\ x \in [0,1] \Big\}.$$
2. Montrer que
$$\inf\Big\{ \sup\{\, |x-y| \ ;\ y \in [0,1]\} \ ;\ x \in [0,1] \Big\} \ \geq \ \tfrac{1}{2}.$$
3. Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et $f : A \times B \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Comparer
$$\inf\Big\{ \sup\{\, f(x,y) \ ;\ x \in A\} \ ;\ y \in B \Big\} \quad \text{et} \quad \sup\Big\{ \inf\{\, f(x,y) \ ;\ y \in B\} \ ;\ x \in A \Big\}.$$

## Exercice supplémentaire 2

Soient $I$ et $J$ deux intervalles ouverts. On suppose que $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$. Démontrer que $I \cap J = \emptyset$.

| Commentaire : |
|---|
| |

# Colle 2 – Sujet 2 Nom : ______ Prénom : ______

## Question de cours

Résolution, en fonction de $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, du système linéaire :

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ qx + 3y = p. \end{cases}$$

## Exercice de TD

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad n = 2^p(2q + 1).$$

## Exercice supplémentaire 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ de façon analytique puis de façon géométrique :

1. $1 < |1 - x| \leq 5$ ;
2. $|x + 3| = |x - 5|$.

## Exercice supplémentaire 2

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application croissante. On note

$$E = \{\, x \in [0, 1] \ ;\ f(x) \geq x \,\}.$$

1. Montrer que $E$ admet une borne supérieure $b$.
2. Prouver que $f(b) = b$ et illustrer graphiquement ce résultat.

Commentaire :

# Colle 2 – Sujet 3 Nom : _______ Prénom : _______

## Question de cours

Donner et démontrer les deux inégalités triangulaires pour des réels.

## Exercice de TD

Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que : $\forall x \in A,\ \forall y \in B, \quad x \leq y$.
   Montrer que $A$ est majorée, $B$ est minorée et $\sup A \leq \inf B$.
2. On suppose que : $\forall x \in A,\ \exists y \in B : x \leq y$.
   Montrer que si $B$ est majorée, alors $A$ l'est aussi et $\sup A \leq \sup B$.

## Exercice supplémentaire

On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit :

$$E = \left\{ \tfrac{a}{2b} \;\middle|\; a \in 2\mathbb{N}+1,\ b \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Montrer que :
$$\forall k \geq 2, \quad \exists K \in \mathbb{N},\ \exists q \in 2\mathbb{N}+1, \quad H_{2k} = \frac{H_k}{2} + \frac{K}{q}.$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 3$ impair :
$$(\forall\, 2 \leq k \leq n \quad H_k \in E) \implies H_{n+1} \in E.$$
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$ pair :
$$H_n \in E \implies H_{n+1} \in E.$$
4. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $H_n$ n'est pas un entier.

Commentaire :

# Colle 2 – exercices bonus

## Exercice

Calculer $\sum_{k=1}^{2010}\lfloor\sqrt{k}\rfloor$. On pourra utiliser que $44^2 = 1936$ et $45^2 = 2025$.