Colle 19 – Sujet 1 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe C^n.

Exercice 1

Déterminer un équivalent simple de u_n, puis en déduire la limite de u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = (n^2 - n)\ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$
2. $u_n = \sqrt{n}\,\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2

Calculer le développement limité de $x\cosh(x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0 en justifiant, avant chaque calcul, l'ordre jusqu'auquel vous utilisez les développements limités usuels.

Commentaire :

Colle 19 – Sujet 2 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Équivalent de $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln(n)}{n+1}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 1

Calculer le développement limité de $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ n+1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
2. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Commentaire :

Colle 19 – Sujet 3 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

$\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1

1. Calculer le développement limité de $\sin(\ln(1+x))$ à l'ordre 4 en 0.
2. Déterminer un équivalent simple de u_n pour

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Exercice 2

Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\exp(x^2)\cos(2x) - 1}{\sin(x^2) - x^2}$.

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto \frac{x^4}{1+x^6}$. Déterminer $f^{(n)}(0)$.

Commentaire :

Colle 19 – exercices bonus

Question de cours

1. $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \arctan(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice

On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

Démontrer que si $A, B \in M_n(K)$ sont deux matrices nilpotentes telles que $AB = BA$, alors AB et $A + B$ sont nilpotentes.

Exercice

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une relation simple liant I_4, U et U^2. En déduire, pour $k \geq 0$, la valeur de U^k.

Exercice

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
En déduire, à partir de la question précédente, la valeur de A^n pour $n \geq 2$.

Exercice

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.