Colle 18 – Sujet 1 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ est inversible ssi $\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(K), \exists! X \in \mathscr{M}_{n,1}(K) : AX = Y$.

Exercice 1

Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice 2

On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

Démontrer que si $A, B \in M_n(K)$ sont deux matrices nilpotentes telles que $AB = BA$, alors AB et $A + B$ sont nilpotentes.

Exercice 3

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une relation simple liant I_4, U et U^2. En déduire, pour $k \geq 0$, la valeur de U^k.

Exercice 4

1. Démontrer que $Q(X) = X^{n+1}\cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X\cos\theta + 1$ est divisible par $P(X) = X^2 - 2X\cos\theta + 1$. On pourra utiliser la formule de Viète pour déterminer les racines de P.
2. Démontrer que $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$.

Commentaire :

Colle 18 – Sujet 2 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Produit de matrices élémentaires.

Exercice 1

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
En déduire, à partir de la question précédente, la valeur de A^n pour $n \geq 2$.

Exercice 2

Soient P et Q des polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$; montrer que P et Q ont un facteur commun non constant si, et seulement si, il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, tels que $AP = BQ$ avec $\deg(A) < \deg(Q)$ et $\deg(B) < \deg(P)$.

Exercice 3

Déterminer le centre de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on ait $AM = MA$.

Commentaire :

Colle 18 – Sujet 3 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Transposée d'un produit de deux matrices.

Exercice 1

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 3

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$. On pourra utiliser le Théorème de d'Alembert-Gauss.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Commentaire :

Colle 18 – exercices bonus

Question de cours

Stabilité de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par produit matriciel.

Critère d'inversibilité pour $A \in \mathscr{M}_2(K)$ et expression de l'inverse.

Exercice

Quel est le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par :

1. $X^2 - 2X + 1$,
2. $X^2 + X + 1$?