Colle 17 – Sujet 1 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Existence et unicité de la division euclidienne.

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

1. $(P')^2 = P$,
2. $P \circ P = P$.

Exercice 2

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 + 1$
2. $X^8 - 1$

Exercice 3

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ avec $a_0 \neq 0$. On suppose que P admet une racine rationnelle $\frac{p}{q}$, avec $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$. Démontrer que $p \mid a_0$ et que $q \mid a_n$.
2. Le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet-il des racines dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 4

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$. On pourra utiliser le Théorème de d'Alembert-Gauss.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Commentaire :

Colle 17 – Sujet 2 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Interpolation de Lagrange.

Exercice 1

Soit $P \in K[X]$, et soient $a, b \in K$ avec $a \neq b$.

1. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. Exprimer R en fonction de P, a et b.
2. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. Exprimer, en utilisant deux méthodes différentes, R en fonction de P, P', a.

Exercice 2

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1.$$

Exercice 3

Soient P et Q des polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$; montrer que P et Q ont un facteur commun non constant si, et seulement si, il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, tels que $AP = BQ$ avec $\deg(A) < \deg(Q)$ et $\deg(B) < \deg(P)$.

Commentaire :

Colle 17 – Sujet 3 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives.

Exercice 1

Déterminer le pgcd des polynômes suivants :

$$P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4 \quad \text{et} \quad Q(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2.$$

Exercice 2

1. Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$. Ce polynôme est-il unique ?
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$.

Exercice 3

1. Démontrer que $Q(X) = X^{n+1}\cos((n-1)\theta) - X^n\cos(n\theta) - X\cos\theta + 1$ est divisible par $P(X) = X^2 - 2X\cos\theta + 1$. On pourra utiliser la formule de Viète pour déterminer les racines de P.
2. Démontrer que $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$.

Commentaire :

Colle 17 – exercices bonus

Question de cours

Détermination des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice

Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice

Quel est le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par :

1. $X^2 - 2X + 1$,
2. $X^2 + X + 1$?