Colle 16 – Sujet 1 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Position relative des sécantes pour une fonction convexe.

Exercice 1

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1. Est-ce que $\max(f, g)$ est toujours convexe ?
2. Est-ce que $\min(f, g)$ est toujours convexe ?

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable possédant une limite finie en $+\infty$.

1. Démontrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f' tend vers 0 en $+\infty$. On pourra utiliser le Théorème de la limite monotone et le Théorème des accroissements finis.
3. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose pas que f est convexe ? On pourra étudier la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\sin(x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 3

1. Démontrer que la fonction f définie par $f(y) = x^y$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tout $x > 1$, on a

$$x^n - 1 \geq n\left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Commentaire :

Colle 16 – Sujet 2 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Toute fonction f dérivable sur I et de dérivée f' croissante est convexe sur I.

Exercice 1

Soit f une fonction convexe sur l'intervalle borné $]a, b[$.

1. f est-elle nécessairement minorée ?
2. f est-elle nécessairement majorée ?

Exercice 2

Que dire d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle, continue et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ?

Exercice 3

Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq (b-a)\, \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

On pourra utiliser le résultat de croissance de l'intégrale : pour g et h deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, si $g(t) \leq h(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t \leq \int_a^b h(t)\, \mathrm{d}t$.

Commentaire :

Colle 16 – Sujet 3 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Toute fonction f convexe et dérivable sur I admet une dérivée f' croissante sur I.

Exercice 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, convexe et strictement croissante sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \to I$.

Exercice 2

1. Étudier la convexité ou la concavité de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+e^x} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

2. En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}.$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose que $x \mapsto f(x)/x$ admet une limite finie $\ell < 1$ en $+\infty$. Démontrer que f admet un point fixe.

Commentaire :

Colle 16 – exercices bonus

Question de cours

Position relative des tangentes pour une fonction convexe dérivable.

Exercice pour S1

Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ avec a et b deux réels. On suppose que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) = +\infty.$$

Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice pour S2

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe

$$0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$$

tels que

$$f'(x_1) + \cdots + f'(x_n) = n.$$

Exercice pour S3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell.$$

Montrer que $\ell = 0$.