Colle 15 – Sujet 1 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Théorème de Rolle.

Exercice 1

Démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$.
2. Pour tout $x \geq 0$, $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

Exercice 2

On définit la fonction suivante sur $\mathbb{R}$

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{4} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Étudier sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$.
   On note pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{3}}$ et $v_n = \frac{1}{n\pi}$.
2. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $u_n \leq x \leq v_n$, on ait
$$(-1)^n \cos\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{2} \geq |2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}|.$$
3. En déduire que $f'(x)$ est du signe de $-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $[u_n, v_n]$ pour n suffisamment grand.
4. En déduire que pour n suffisamment grand, f est strictement croissante sur le segment $[u_n, v_n]$ si n est impair et strictement décroissante sur le segment $[u_n, v_n]$ si n est pair.
5. L'assertion suivante est-elle vraie ?
   "Si une fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(0) > 0$, alors g est strictement croissante sur un voisinage de 0."
   Si oui, démontrer le, si non, donner un contre-exemple.

Exercice 3

Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ avec a et b deux réels. On suppose que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) = +\infty.$$

Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Commentaire :

Colle 15 – Sujet 2 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Théorème des accroissements finis.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

1. Montrer que la fonction f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, et calculer sa dérivée f'.
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
3. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2

Pour chaque question, si la réponse est oui, proposer une démonstration, sinon, donner un contre-exemple.

1. Notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, alors f est-elle nécessairement croissante sur $\mathcal{D}_f$?
2. Si une fonction f est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, est-ce que $f'(x) > 0$ nécessairement pour tout $x \in \mathbb{R}$?
3. Si une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$, est-ce que f admet forcément un extremum local en 0 ?

Exercice 3

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable avec $n \geq 1$. On suppose que

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0.$$

Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Commentaire :

Colle 15 – Sujet 3 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Condition nécessaire d'extremum sur un intervalle ouvert.

Exercice 1

1. Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer le Théorème de la limite de la dérivée pour en déduire qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2

1. Démontrer que pour tout $x > 0$,
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$
Montrer que
$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n.$$
3. En déduire que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert et symétrique par rapport à 0. Comparer la parité de la fonction f et de sa dérivée f'.

Commentaire :

Colle 15 – exercices bonus

Question de cours

Dérivabilité d'une composée de fonctions dérivables.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell.$$

Montrer que $\ell = 0$.

Exercice

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe

$$0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$$

tels que

$$f'(x_1) + \cdots + f'(x_n) = n.$$