Colle 14 – Sujet 1 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Résultat et démonstration du théorème des valeurs intermédiaires par dichotomie.

Exercice 1

Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \lfloor 1/x \rfloor$
2. $h : x \mapsto x^2 \lfloor 1/x \rfloor$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose que $x \mapsto f(x)/x$ admet une limite finie $\ell < 1$ en $+\infty$. Démontrer que f admet un point fixe.

Commentaire :

Colle 14 – Sujet 2 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, de limite finie en $+\infty$, est bornée et admet un minimum ou un maximum.

Exercice 1

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x) > g(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

1. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que

$$f(x) \geq kg(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Commentaire :

Colle 14 – Sujet 3 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$ admet un point fixe.

Exercice 1

Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

1. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$,
2. $g(x) = \sin(x)\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

Exercice 2

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.

1. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) < g(x)$. Montrer que
$$f(x) \leq g(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
2. Montrer que l'on n'a pas nécessairement une inégalité stricte dans la question précédente. On pourra considérer g comme la fonction distance à un irrationnel fixé.
3. On suppose désormais que, pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ avec $x < y$, on a $f(x) < f(y)$. Montrer que f est strictement croissante.

Commentaire :

Colle 14 – exercices bonus

Question de cours

Théorème de bijection monotone.
Théorème des bornes atteintes.

Exercice (S1 en priorité)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \max_{t\in[0,x]} f(t)$. Démontrer que la fonction F est continue. On pourra faire une illustration graphique afin d'avoir une idée de disjonction de cas.

Exercice

Que dire d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle, continue et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ?

Exercice (pour S1 ou S2)

Dire si la fonction suivante est prolongeable par continuité en 0 :
$h(x) = \cos(x)\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.