

Question de cours

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ et déterminer ses inversibles.
2. Définition de f admet pour limite $-\infty$ en un réel a .
3. Définition de f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 1

L'anneau des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de l'addition et de la multiplication est-il intègre ?

Exercice 2

1. Soit $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ un morphisme d'anneaux. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(n) = n$.
En déduire que $f = \text{id}_{\mathbb{Q}}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme d'anneaux. Démontrer que f est croissante. En déduire que $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.
On pourra utiliser, après l'avoir démontré, que tout $x \in \mathbb{R}$, il existe (y_n) et (z_n) deux suites de rationnels qui convergent vers x et telles que, pour tout entier n , on ait $y_n \leq x \leq z_n$.
3. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme d'anneaux dont la restriction à \mathbb{R} est $\text{id}_{\mathbb{R}}$. Démontrer que $f = \text{id}_{\mathbb{C}}$ ou que f est le morphisme de conjugaison.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Démontrer que f admet un minimum sur \mathbb{R} .

Commentaire :

Question de cours

1. Caractérisation séquentielle d'une limite ℓ réelle en un point a réel.
2. Définition de f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$.

Exercice 1

Démontrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 , alors $|f|$ est continue en x_0 . Démontrer que la réciproque est fausse.

Exercice 2

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\text{End}(G)$ l'ensemble des morphismes de groupe de G dans G , sur lequel on définit la loi $+$ par $f + g : G \rightarrow G, x \mapsto f(x) + g(x)$. Démontrer que $(\text{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point.

Commentaire :

Question de cours

1. Dans tout anneau, « 0 est absorbant » et la « règle des signes » s'applique.
2. Définition de f admet une limite finie l en un réel a .
3. Définition de f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^4 + 3x^2) e^{-x^2}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, on ait $|f(x)| \leq 1$.
3. Démontrer qu'il existe un réel $B < 0$ tel que, pour tout $x \leq B$, on ait $|f(x)| \leq 1$.
4. Démontrer que la fonction f est bornée sur \mathbb{R} .
5. Le résultat suivant "si f est une fonction continue sur \mathbb{R} admettant une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$, alors f est bornée sur \mathbb{R} " est-il vrai ?

Exercice 2

Soit $A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in 2\mathbb{N} + 1 \right\}$. Démontrer que $(A, +, \times)$ est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 3

Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

1. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$,
2. $g(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$,
3. $h(x) = \cos(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

Commentaire :

Colle 13 – exercices bonus

Question de cours

Tout corps est intègre.

Exercice

Soit D l'ensemble des nombres décimaux,

$$D = \left\{ \frac{n}{10^k} \mid n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Démontrer que $(D, +, \times)$ est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice

Soient K et L deux corps et f un morphisme d'anneaux de K dans L .

- (a) Montrer que $f(x)$ est inversible pour tout $x \in K$ non nul et déterminer $f(x)^{-1}$.
- (b) En déduire que f est injectif.