

Question de cours

Tout groupe cyclique est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1

Soit (G, \cdot) un groupe. Démontrer que $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ est un sous-groupe de G où $a \in G$ et H est un sous-groupe de G .

Exercice 2

Soit (G, \cdot) un groupe fini et H un sous-groupe de G .

1. En utilisant que deux ensembles ont le même cardinal s'il existe une bijection entre ces deux ensembles, montrer que pour tout $a \in G$, les ensembles H et $aH = \{ah \mid h \in H\}$ ont le même nombre d'éléments.
2. On définit une relation \sim sur G par :

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Montrer que \sim est une relation d'équivalence sur G et déterminer l'ensemble des classes d'équivalence.

3. En utilisant que si A_1, \dots, A_p constitue une partition d'un ensemble fini E , alors

$$\text{card}(E) = \text{card}(A_1) + \dots + \text{card}(A_p),$$

en déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G .

Exercice 3

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de déterminer les entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ solutions de $a^2 + b^2 = 2^k$.

1. Démontrer que si a et b sont des entiers tels que $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{4}$, alors a et b sont pairs.
2. En déduire que l'équation $2^{2n} = a^2 + b^2, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{N}^*$, n'admet pas de solutions.
3. Démontrer que l'équation $2^{2n+1} = a^2 + b^2, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{N}^*$, admet une unique solution que l'on précisera.

Commentaire :

Question de cours

Lien entre injectivité d'un morphisme de groupes et noyau.

Exercice 1

Dans un groupe (G, \cdot) , un élément x est dit *de torsion* s'il existe $n \geq 1$ tel que $x^n = e$.

1. On suppose dans cette question que G est commutatif. Démontrer que l'ensemble des éléments de torsion de G est un sous-groupe de G .
2. On dit que G est *de torsion* si tous ses éléments sont de torsion et on dit que G est *sans torsion* si son seul élément de torsion est l'élément neutre. Soit G_1 un groupe de torsion et G_2 un groupe sans torsion. Déterminer tous les morphismes de groupes de G_1 dans G_2 .

Exercice 2

Pour $n \geq 1$ un entier, on définit l'indicatrice d'Euler de n par :

$$\varphi(n) = \text{card}\{1 \leq k \leq n \mid k \text{ est premier avec } n\}.$$

1. Calculer $\varphi(p)$ lorsque p est un nombre premier.
2. Calculer $\varphi(p^\alpha)$, où p est premier et $\alpha \geq 1$.
3. On admet que si $\text{pgcd}(n, m) = 1$, alors $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$. En déduire des questions précédentes une formule pour calculer $\varphi(n)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$ qui fait apparaître n .
4. Soit d un diviseur positif de n . On pose

$$A_d = \{1 \leq k \leq n \mid \text{pgcd}(k, n) = d\}.$$

Quel est le cardinal de A_d ?

5. En utilisant que si E_1, \dots, E_p constitue une partition d'un ensemble fini E , alors

$$\text{card}(E) = \text{card}(E_1) + \dots + \text{card}(E_p),$$

en déduire que

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Commentaire :

Question de cours

Propriétés des éléments inversibles pour une l.c.i. associative qui admet un neutre.

Exercice 1

1. Traduire en termes de morphismes de groupes les propriétés bien connues suivantes :

(a) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;

(b) $|zz'| = |z||z'|$;

(c) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$;

(d) $e^{x+y} = e^x e^y$.

2. Justifier que \exp est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans (\mathbb{C}^*, \cdot) . Quelle est son noyau ? Son image ?

Exercice 2

Montrer que $H = \{x + y\sqrt{3} \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$ est un sous-groupe de (\mathbb{R}_+^*, \times) .

Exercice 3

Soient $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $a \geq 2$ et $m \leq n$. On note $d = \text{pgcd}(a^n - 1, a^m - 1)$ et r le reste dans la division euclidienne de n par m .

1. Montrer que $a^n \equiv a^r \pmod{a^m - 1}$.

2. En déduire que $a^n - 1$ s'écrit comme combinaison linéaire de $a^r - 1$ et de $a^m - 1$.

3. En déduire que $d = \text{pgcd}(a^r - 1, a^m - 1)$, puis que $d = a^{\text{pgcd}(n,m)} - 1$.

4. À quelle condition $a^m - 1$ divise $a^n - 1$?

Commentaire :

Colle 12 – exercices bonus

Question de cours

Caractérisation des sous-groupes.

Exercice