Colle 11 – Sujet 1 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Existence d'une relation de Bachet-Bézout pour a, b entiers non nuls.

Exercice 1

Y a t'il des points à coordonnées entières sur la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{300}$?

Exercice 2

1. Démontrer que si p_1, p_2 et p_3 sont trois entiers premiers distincts qui divisent un entier n, alors leur produit divise n.
2. Soit $a \in \mathbb{Z}$ un entier premier avec 561. Montrer que $a^{560} \equiv 1 \pmod 3$, $a^{560} \equiv 1 \pmod{11}$ et que $a^{560} \equiv 1 \pmod{17}$.
3. L'assertion suivante est-elle correcte ? Pour $p \in \mathbb{Z}$: "p est premier si et seulement si pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que p et a sont premiers entre eux, p divise $a^{p-1} - 1$."

Exercice 3

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de déterminer les entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ solutions de $a^2 + b^2 = 2^k$.

1. Démontrer que si a et b sont des entiers tels que $4 \mid a^2 + b^2$, alors a et b sont pairs.
2. En déduire que l'équation
$$2^{2n} = a^2 + b^2, \qquad n \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{N}^*,$$
n'admet pas de solutions.
3. Démontrer que l'équation
$$2^{2n+1} = a^2 + b^2, \qquad n \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{N}^*,$$
admet une unique solution que l'on précisera.

Commentaire :

Colle 11 – Sujet 2 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Petit théorème de Fermat.

Exercice 1

Déterminer les entiers naturels n tels que $n-4$ divise $2n-17$.

Exercice 2

1. Démontrer que pour tous entiers a, b, q, $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a-qb)$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{Z}$, le pgcd de $15n^2 + 8n + 6$ et $30n^2 + 21n + 13$.

Exercice 3

On considère quatre entiers relatifs non nuls m, n, p, q tels que $\text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(p, q) = 1$. On note Δ la droite d'équation

$$y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}.$$

1. On suppose que la droite Δ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0, y_0 sont des entiers relatifs. Démontrer que q divise n.
2. Réciproquement, on suppose que q divise n et montrer qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tel que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

Commentaire :

Colle 11 – Sujet 3 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Lemme de Gauss

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que 6 divise $n(n+1)(n+2)$.
2. Démontrer que 6 divise $n(n+2)(7n-5)$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite d'entiers définie par

$$u_0 = 14 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 5u_n - 6.$$

Déterminer le pgcd de deux termes consécutifs de la suite en précisant sa valeur.

Exercice 3

Soient $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $a \geq 2$ et $m \leq n$. On note $d = \mathrm{pgcd}(a^n - 1,\, a^m - 1)$ et r le reste dans la division euclidienne de n par m.

1. Montrer que $a^n \equiv a^r \pmod{a^m - 1}$.
2. En déduire que $a^n - 1$ s'écrit comme combinaison linéaire de $a^r - 1$ et de $a^m - 1$.
3. En déduire que $d = \mathrm{pgcd}(a^r - 1,\, a^m - 1)$, puis que $d = a^{\mathrm{pgcd}(n,m)} - 1$.
4. À quelle condition $a^m - 1$ divise $a^n - 1$?

Commentaire :

Colle 11 – exercices bonus

Question de cours

Infinité de l'ensemble des nombres premiers.

Exercice

Un nombre palindrome est un nombre qui se lit indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 2002, 12321 sont des nombres palindromes. Prouver qu'un nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres est divisible par 11.