# Colle 10 – Sujet 1 Nom : ______ Prénom : ______

## Question de cours

Étude des suites $(u_n)$ définies par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right).$$

## Exercice 1

Déterminer un équivalent de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = n\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right).$$

## Exercice 2

Soit $\alpha > 0$ et $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}$.

1. Démontrer que si $\alpha > 1$ alors $u_n \to 0$.
2. Démontrer que si $\alpha < 1$, alors $u_n \to +\infty$.
3. Démontrer que si $\alpha = 1$, la suite est monotone et convergente.
4. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\ln(1 + x) \leq x \leq -\ln(1 - x).$$

5. En déduire que pour $\alpha = 1$, $u_n \to \ln 2$.

Commentaire :

# Colle 10 – Sujet 2 Nom : ______ Prénom : ______

## Question de cours

Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$ (en corollaire du cas réel).

## Exercice 1

1. Déterminer un équivalent, le plus simple possible, des suites $(\ln(\cos(\frac{1}{n})))_n$ et $(\ln(\sin(\frac{1}{n})))_n$.
2. Démontrer que si $(x_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $(x_n)$ est équivalente à $(y_n)$ avec $(x_n)_n$ qui converge vers $l \neq 1$, alors $(\ln(x_n))_n$ est une suite équivalente à $(\ln(y_n))_n$.
3. Le résultat reste-il vrai si $l = 1$ dans la question précédente ? On pourra étudier $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ définies par $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $y_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.

## Exercice 2

Soit $f : ]0, +\infty[ \to ]0, +\infty[$ définie par

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$

On considère la suite récurrente $(u_n)$ vérifiant

$$u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{et} \qquad u_0 = 1.$$

1. Étudier le sens de variation de $f$ sur l'intervalle $[1, 3]$ et montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par $f$. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)$ ?
2. On définit deux suites intermédiaires :

$$v_n = u_{2n}, \qquad w_n = u_{2n+1}.$$

   Montrer que $(v_n)$ et $(w_n)$ sont convergentes et déterminer leur limite respective.
3. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?

Commentaire :

# Colle 10 – Sujet 3 Nom : ______ Prénom : ______

## Question de cours

Théorème de limite monotone pour une suite croissante et majorée.

## Exercice 1

Étudier la convergence de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n \coloneqq \left(2\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n.$$

## Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$
3. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

## Exercice 3

Soient $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites de nombres réels définies par $0 < x_0 < y_0$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n + y_n}, \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n^2}{x_n + y_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(y_n - x_n)$ est constante.
2. En déduire que la suite $(x_n)$ est décroissante.
3. Montrer que les deux suites sont convergentes et calculer leur limite respective.

| Commentaire : |
|---|
| |

# Colle 10 – exercices bonus

## Exercice

Soient $0 \leq b \leq a$ et $(u_n)$, $(v_n)$ les deux suites définies par

$$u_0 = a, \qquad v_0 = b, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

On admettra que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont bien définies avec $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ pour tout entier $n$.

1. Démontrer que pour tous réels positifs $x$ et $y$, on a
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$u_n \geq v_n, \qquad u_{n+1} \leq u_n, \qquad v_{n+1} \geq v_n.$$
3. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n).$$
4. En déduire que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers la même limite.

## Exercice

Soit $a \in \mathbb{C}$. À quelle condition la suite définie par

$$u_{n+1} = a\,u_n^2, \qquad u_0 \in \mathbb{C},$$

converge-t-elle vers zéro ?