Colle 1 – Sujet 1 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leq q$, énoncer et démontrer la formule pour

$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k).$$

Exercice de TD

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$. Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.
2. $(A \cup B) \cap (A \cup B^c)$.
3. $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$.
4. $A \cup (B \cap A^c) \cup (C \cap A^c)$.

Exercice supplémentaire 1

Montrer :

$$\prod_{k=1}^{n} (6k - 3) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

Pour une démonstration directe, on pourra décomposer $(2n)!$ en deux produits : celui des termes pairs et celui des termes impairs.

Exercice supplémentaire 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour quels entiers $p \in \{0, \ldots, n-1\}$ a-t-on
$$\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1}?$$
2. Soit $p \in \{0, \ldots, n\}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $q \in \{0, \ldots, n\}$ a-t-on
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q}?$$

Commentaire :

Colle 1 – Sujet 2 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Rappeler puis démontrer les lois de De Morgan pour les parties d'un ensemble E.

Exercice de TD

On cherche à démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

1. Prouver cette formule en raisonnant par récurrence.
2. Retrouver ce résultat en simplifiant la somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \Big((k+1)^4 - k^4\Big).$$

Exercice supplémentaire

On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit :

$$E = \left\{ \tfrac{a}{2b} \;\middle|\; a \in 2\mathbb{N}+1,\ b \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$ pair :

$$H_n \in E \implies H_{n+1} \in E.$$

2. Montrer que :

$$\forall k \geq 2, \quad \exists K \in \mathbb{N},\ \exists q \in 2\mathbb{N}+1, \quad H_{2k} = \frac{H_k}{2} + \frac{K}{q}.$$

3. En déduire que pour tout $n \geq 3$ impair :

$$(\forall\, 2 \leq k \leq n \quad H_k \in E) \implies H_{n+1} \in E.$$

4. En déduire que pour tout $n \geq 2$, H_n n'est pas un entier.

Commentaire :

Colle 1 – Sujet 3 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Rappeler les formules pour

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

puis les démontrer.

Exercice de TD

Soient E, F, G trois ensembles non vides. Montrer que :

$$E \times F \subset F \times G \implies E \subset G.$$

Exercice supplémentaire 1

Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Montrer que D ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien $A \times B$ de deux parties $A, B \subset \mathbb{R}$.

Exercice supplémentaire 2

On pose pour un entier $p \geq 1$:

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer les S_p de proche en proche.

Exercice supplémentaire 3

Quel est le coefficient devant $a^2 b^4 c$ dans le développement de $(a + b + c)^7$?

Commentaire :