

Question de cours

Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser, en suivant le procédé de Schmidt, la base suivante :

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (1, 1, 1), \quad w = (-1, -1, 0).$$

Exercice 2

1. Soit $n \geq 1$ et soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Montrer que l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i) Q(a_i),$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. L'application suivante définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

$$\varphi_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2};$$

Exercice 3

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On suppose en outre que $x_k > 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2,$$

et étudier les cas d'égalité.

Commentaire :

Question de cours

Démontrer que toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore.

Exercice 1

Les applications suivantes définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

1.

$$\varphi_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2 ;$$

2.

$$\varphi_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 4x_1y_1 - x_2y_2.$$

Exercice 2

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Démontrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{17}{10}$.

Exercice 3

1. Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire

$$\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M^T N).$$

On pose

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

(a) Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.

(b) Calculer la projection de

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sur $F^\perp$.

(c) Calculer la distance de J à F .

Commentaire :

Question de cours

Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une BON.

Exercice 1

Démontrer que, pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2k} \right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0, x + y + 2z - t = 0 \right\}.$$

1. Donner une base orthonormale de F .
2. En déduire le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F .

Exercice 3

1. La formule suivante définit-elle un produit scalaire sur $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$:

$$\langle f, g \rangle = f(0) g(0) + \int_0^1 f'(t) g'(t) dt?$$

Commentaire :

Colle – exercices bonus

Question de cours

1. Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . Démontrer que

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Donner l'expression du projeté orthogonal sur F dans une base orthonormale de F .

2. Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . Exprimer la distance d'un vecteur $x \in E$ à F à l'aide du projeté orthogonal de x sur F .

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance du vecteur $u = (3, 4, 3)$ au plan P d'équation

$$2x + y - z = 0.$$

Exercice

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère les sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x - y + 2z + t = 0, \\ -x + 2y + 3z - t = 0 \end{array} \right\},$$

et

$$G = \text{vect}\left((1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, -1)\right).$$

Déterminer une base de $F^\perp$ et de $G^\perp$.

Exercice

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le sous-espace G de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0, x + 2y + 3z + t = 0 \right\}.$$

Déterminer un système d'équations de $G^\perp$.

Exercice

La formule suivante définit-elle un produit scalaire sur $E = C([a, b], \mathbb{R})$, où $w \in E$ vérifie $w(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) w(t) dt?$$