

Question de cours

Déterminant de la transposée.

Exercice 1

Soit $n \geq 4$ et $a, b, c, d \in \{1, \dots, n\}$ tous distincts.

1. Que dire d'une permutation de S_n possédant au moins $n - 1$ points fixes ?
2. Une permutation $s \neq \text{Id}$ telle que $s^2 = \text{Id}$ est-elle nécessairement une transposition ?
3. Décomposer σ en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions, calculer la signature de σ puis calculer σ^{100} :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On considère les matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $B = TA$ et calculer le déterminant de B .
2. Dédire de la question précédente le déterminant de A .
3. Dédire de la question précédente le déterminant de

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 55 \\ -9 & -3 & 25 \\ -18 & -6 & 40 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Commentaire :

Question de cours

Calcul du déterminant de Vandermonde.

Exercice 1

Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Donner la signature de σ .
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. Calculer σ^{100} .

Exercice 2

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3

Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que M^{-1} appartienne à $M_n(\mathbb{Z})$.

Commentaire :

Question de cours

Propriété d'antisymétrie des applications n-linéaires alternées.

Exercice 1

Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints, donner sa signature puis décomposer σ en produit de transpositions et calculer σ^{2001} .

2. Soient $n \geq 2$ et $2 \leq k \leq n$.

Combien le groupe S_n possède-t-il de cycles de longueur k ?

3. Énumérer tous les éléments de S_4 .

Exercice 3

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de $3A - 6I_3$ sachant que $A^2 = 4A - 3I_3$ et que ce déterminant est positif.

Commentaire :

Colle – exercices bonus

Question de cours

Commutativité de deux permutations à supports disjoints.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $C \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(C + X) = \det(X)$. Démontrer que $C = 0$.
2. Soient $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ telles que, pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A + X) = \det(B + X)$. Que dire de A et B ?

Exercice

Soient n et p des entiers tels que $p < n$. Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de AB .