

Question de cours

Toute matrice de rang r est équivalente à J_r dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Exercice 1

Déterminer, suivant la valeur du réel a , le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

- On fixe un entier $n \geq 1$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P - P'$.
On pose

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et M la matrice de φ dans cette base.

- Déterminer la matrice M .
- Montrer que les matrices M et N sont semblables.

Exercice 3

- Soit A la matrice de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Commentaire :

Question de cours

Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de la matrice de Vandermonde $V(x_1, \dots, x_n)$.

Exercice 1

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie, pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$, par $f(M) = AM$. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques respectives est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose $e'_1 = e_2 + e_3, e'_2 = e_3 + e_1, e'_3 = e_1 + e_2$, et $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$. On admet que $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et que $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer le rang de A .
2. Quelle est la matrice de u dans les bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$?

Exercice 3

Soit B la matrice diagonale par blocs

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}.$$

Calculer le rang de B en fonction des rangs des matrices A_i .

Commentaire :

Question de cours

Définition et propriétés des matrices de passage.

Exercice 1

1. Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

2. Calculer le rang de la matrice suivante : $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

On note $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice de u dans les bases $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ et $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2))$.

Exercice 3

Prouver qu'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

Commentaire :

Colle – exercices bonus

Question de cours

Formules de passage pour un vecteur et pour une application linéaire.

Exercice

1. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.
Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Exercice

Montrer qu'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.