

Question de cours

Si deux évènements A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi.

Exercice 1

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X . En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $\text{Cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard de façon équiprobable une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
2. En déduire la loi de Y .
3. Calculer l'espérance de Y .

Exercice 3

On dispose d'une pièce truquée et on souhaite estimer la probabilité que l'on tombe sur "pile" en la lançant. On note p cette probabilité. Pour cela, on lance n fois cette pièce, on note S_n le nombre de "piles" obtenu et on note $M_n = S_n/n$. Combien de lancers faut-il effectuer pour que M_n approche p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure à 0.9 ?

Commentaire :

Question de cours

Loi de $X_1 + \dots + X_n$ pour un n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.

Exercice 1

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}^2$.

1. Déterminer la loi de X , la loi de Y .
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé fini Ω . On suppose qu'elles sont deux à deux indépendantes, qu'elles ont même espérance m et même variance σ^2 . On pose $S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|S_n - m| \geq \varepsilon) \rightarrow 0.$$

Exercice 3

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On en tire n en effectuant des tirages avec remise. On note X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus. Déterminer la loi de X et la loi de Y .

Commentaire :

Question de cours

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 1

Dans une classe, la moyenne des notes est de $10/20$. On choisit un élève au hasard. Démontrer qu'il a au moins une chance sur trois d'avoir moins que $15/20$.

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}^2$. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 3

Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit la variable aléatoire X par : $X = k$ si le k -ième candidat qui passe le test est engagé ; $X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X .
2. En déduire $E(X)$.
3. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Commentaire :

Colle – exercices bonus

Question de cours

Variance d'une somme, application à la loi binomiale.

Exercice

1. Soient a, b, c, d, λ cinq réels strictement positifs. Montrer qu'il est impossible que

$$\begin{cases} ab = \lambda \\ cd = \lambda \\ ac + bd \leq \lambda. \end{cases}$$

2. Soit $n \geq 1$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ dont la somme suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, 2n\}$?