

Question de cours

Nature des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

1. Soit, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \geq 0$, $u_{n+k+1} \leq 25^{-k} u_{n+1}$.
3. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \leq \frac{25}{24} u_{n+1}$.
4. En déduire une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.

Exercice 2

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$. Vous pourrez utiliser qu'une primitive de $\ln(x)$ est donnée par $x \ln(x) - x$.

Exercice 3

On considère la série de terme général $u_k := \frac{(-1)^k}{k+1}$ pour tout $k \geq 0$.

1. Démontrer que cette série converge.
2. Démontrer que sa somme vaut $\ln(2)$ à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Commentaire :

Question de cours

Critère spécial des séries alternées.

Exercice 1

Soit x un réel strictement positif. Démontrer que : $\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}$. En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 2

Donner la nature de la série numérique $\sum \left[\exp \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right) - \exp \left(\cos \left(\frac{2}{n} \right) \right) \right]$.

Exercice 3

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $\sum u_n$ converge. Déterminer, pour tout $\alpha > 1$, la nature de la série $\sum u_n^\alpha$.
2. On suppose que $\sum u_n$ diverge. déterminer, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, la nature de la série $\sum u_n^\alpha$.

Exercice 4

Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$.

Commentaire :

Question de cours

Formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 1

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$, prouver que :

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 2

1. Donner la nature de la série numérique $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n} \int_0^1 t^n f(t) dt$ est convergente.

Exercice 3

1. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

3. Le résultat suivant : "si les termes généraux de deux séries sont équivalents, alors les séries ont la même nature" est-il vrai ? Si oui, le démontrer ; sinon, donner un contre-exemple.

Commentaire :

Colle – exercices bonus

Question de cours

Toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 4

Déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 2}{n!}$.