Colle – Sujet 1 Nom : _______ Prénom : _______

Question de cours

Fonctions continues d'intégrale nulle sur un segment non trivial.

Exercice 1

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{X^4 - 1}.$$

Exercice 2

Pour $n \geq 0$, on définit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx.$$

1. Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Exercice 3

Déterminer la limite de

$$S_n = \sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}.$$

Exercice 4

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, une fonction continue non identiquement nulle. On suppose qu'il existe un entier n tel que, pour tout $0 \leq k \leq n$, on a

$$\int_a^b t^k f(t)\, dt = 0.$$

On souhaite prouver que, dans l'intervalle $[a, b]$, il existe au moins $n+1$ points distincts où f s'annule en changeant de signe.

Commentaire :

Colle – Sujet 2 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Théorème de Heine.

Exercice 1

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{X^2+3X+1}{(X-1)^2(X-2)}.$$

Exercice 2

Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $n \geq m$. Calculer

$$\int_m^n \lfloor x \rfloor \, dx.$$

Exercice 3

Déterminer les fonctions continues $f : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 f^2(t)\, dt.$$

Exercice 4

Déterminer la limite de

$$v_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (k+n)^{\frac{1}{n}}.$$

Commentaire :

Colle – Sujet 3 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Homogénéité, inégalité triangulaire et séparation pour $\|\cdot\|_\infty$

Exercice 1

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, calculer
$$I(a) = \int_0^1 \min(x, a)\, dx.$$

Exercice 2

1. Soit $P(X) = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$. Quelle est la multiplicité de la racine 1 ? En déduire une décomposition de P en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$:
$$\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}.$$

Exercice 3

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$ et
$$\int_a^b f(x)\, dx = b - a.$$
Que peut-on dire de f ?

Exercice 4

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, avec $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$, telle que
$$F' = \frac{1}{X}.$$

1. Démontrer que $X \mid Q$.
2. Soit $n \geq 1$ tel que $X^n \mid Q$. Démontrer que $X^n \mid Q'$.
3. Conclure.

Commentaire :