Colle 23 – Sujet 1 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Caractérisation des hyperplans comme supplémentaires d'une droite vectorielle.

Exercice 1

Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n dont la somme de chaque ligne est nulle, est supérieure ou égale à $n(n-1)$.

Exercice 2

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $\ker(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$.
2. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $\varphi \in E^*$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a

$$\varphi\Big((X-a)P\Big) = 0.$$

1. Démontrer que si deux formes linéaires non nulles ont la même noyau, alors elles sont proportionnelles.
2. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $P \in E$, on a $\varphi(P) = \lambda\, P(a)$.

Commentaire :

Colle 23 – Sujet 2 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) \geqslant n - p$ pour p hyperplans en dimension n.

Exercice 1

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2

Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(M) = \lambda \operatorname{Tr}(M).$$

Exercice 3

Soit E et F deux espaces vectoriels, $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, E)$ vérifiant

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$

1. Démontrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont en somme directe.
2. Démontrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires.
3. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $f(P) = P'$ et $g : P(x) \mapsto \int_0^x P(t)\,dt$. Vérifier que f et g satisfont toutes les conditions de l'énoncé. Sont-elles inversibles ?

Commentaire :

Colle 23 – Sujet 3 Nom : ______ Prénom : ______

Question de cours

Théorème du rang

Exercice 1

Soient S et T les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$S(x,y) = (2x - 5y,\ -3x + 4y) \quad \text{et} \quad T(x,y) = (-8y,\ 7x + y).$$

1. Déterminer les matrices de S et T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les applications linéaires $S + T$, $S \circ T$, $S \circ S$ ainsi que leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2, \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base de $\ker u$. u est-il injectif ? Peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$. Quel est le rang de u ?
4. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel et $x, y \in E$. Démontrer que $x = y$ si et seulement si, pour tout $\varphi : E \to \mathbb{R}$ linéaire, on a

$$\varphi(x) = \varphi(y).$$

Commentaire :

Colle 23 – exercices bonus

Question de cours

En dimension n, tout sous-espace vectoriel de dimension m est intersection de $n - m$ hyperplans.