

Question de cours

Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire par l'image d'une base.

Exercice 1

Soient F, G les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 suivants : $F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3 ; a \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3 ; b, c \in \mathbb{R}\}$. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 2

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z).$$

1. f est-elle une symétrie ? une projection ?
2. Déterminer une base de ses éléments caractéristiques.

Exercice 3

Soit E et F deux espaces vectoriels, $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, E)$ vérifiant

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$

1. Démontrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont en somme directe.
2. Démontrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont supplémentaires.
3. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $f(P) = P'$ et $g : P(x) \mapsto \int_0^x P(t) dt$. Vérifier que f et g satisfont toutes les conditions de l'énoncé. Sont-elles inversibles ?

Commentaire :

Question de cours

Caractérisation algébrique des projecteurs $p \in L(E)$:

$$p \in L(E) \text{ est un projecteur si et seulement si } p^2 = p.$$

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

1. Déterminer le noyau de f et son image.
2. f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 2

Soient F et G les sous-espaces vectoriels suivants de \mathbb{R}^3 : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y - 2z = 0\}$; $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x = 2y = x + z\}$.

1. Déterminer la dimension de F , puis la dimension de G .
2. Calculer $F \cap G$. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2, \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de $\ker u$. L'endomorphisme u est-il injectif ? Peut-il être surjectif ?
2. Déterminer une base de $\text{Im } u$.
3. Montrer que $E = \ker u \oplus \text{Im } u$.

Commentaire :

Question de cours

Dimensions de $E \times F$ et $L(E, F)$ lorsque E et F sont de dimension finie.

Exercice 1

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

Exercice 2

On considère l'endomorphisme $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$s(x, y, z) = (-x - 4y - 2z, 4x + 9y + 4z, -8x - 16y - 7z).$$

1. Montrer que s est une symétrie.
2. Déterminer $F = \ker(s - \text{Id})$ et $G = \ker(s + \text{Id})$ et une base de chacun de ces deux sous-espaces.

Exercice 3

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z).$$

1. Déterminer une base du noyau de f et sa dimension.
2. L'application f est-elle injective ?
3. L'application f est-elle surjective ?

Commentaire :