La multiplication des nœuds

Un parallèle étonnant entre le monde des nœuds et celui des nombres entiers

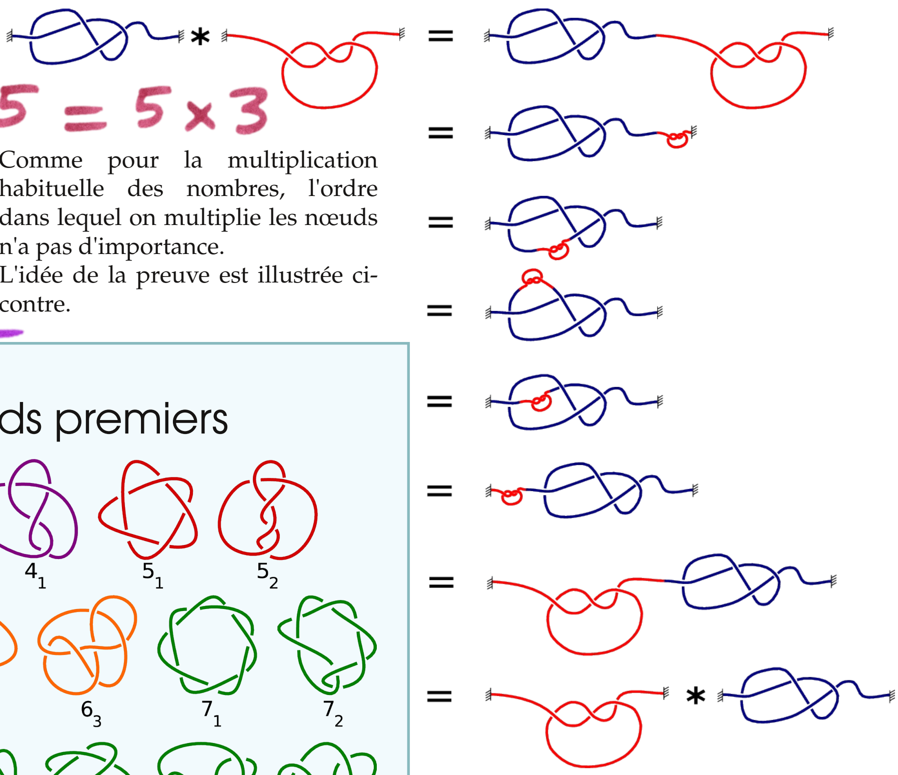
On peut composer les nœuds entre eux, et cette opération possède toutes les caractéristiques de la multiplication des nombres entiers ! Comment procède-t-on ? Rien de plus simple : prenez un nœud A et un nœud B, mettez-les bout-à-bout, vous obtenez le produit de A par B.

$1 \times 7 = 7 \times 1 = 7$

Le nœud trivial (sans aucun croisement) joue le rôle du 1 pour la multiplication des entiers : si on le compose avec un autre nœud, ce dernier n'est pas modifié.

$3 \times 5 = 5 \times 3$

Comme pour la multiplication habituelle des nombres, l'ordre dans lequel on multiplie les nœuds n'a pas d'importance.
L'idée de la preuve est illustrée ci-contre.



$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Tout comme il existe des nombres premiers (sans diviseurs autres que 1 et eux-mêmes), il existe des nœuds que l'on ne peut pas décomposer en produit de nœuds non triviaux. On parle de **nœuds premiers**.
On peut montrer que tout nœud se décompose de façon unique en un produit de nœuds premiers.

Les nœuds premiers

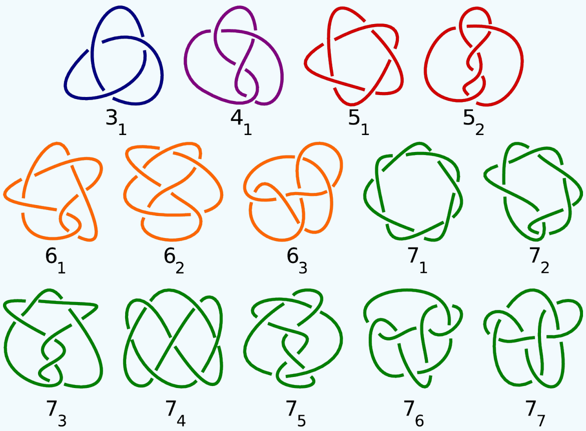


Table des nœuds premiers réalisables avec au plus 7 croisements.

Références

Nœuds : Genèse d'une théorie mathématique
Alexei Sossinski, Edition du seuil, Paris 1999.

Nœuds et tresses
Michael Eisermann.
http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/

Les tresses : de la topologie à la cryptographie
Luis Paris, Images des Mathématiques
http://images.math.cnrs.fr/Les-tresses-de-la-topologie-a-la.html

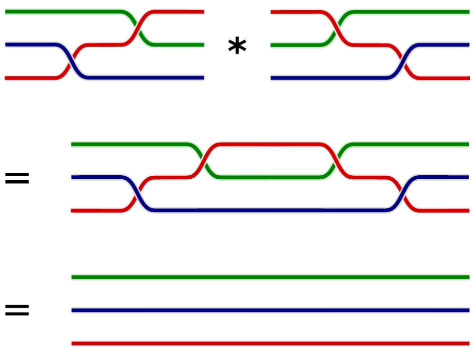
$6 \times n \neq 1$

6 multiplié par un nombre entier ne donnera jamais 1. C'est moins évident, mais vrai aussi pour les nœuds : on ne peut pas dénouer un nœud non trivial en le composant avec un autre nœud.

Les nœuds ne dénouent pas...
Mais les tresses détressent !

Proches cousines des nœuds, les tresses peuvent aussi être composées. Mais cette opération n'a pas les mêmes propriétés.

L'ordre dans lequel on compose les tresses est important. De plus, chaque tresse peut être détressée en la composant avec la tresse «miroir».
La structure des groupes de tresses est l'objet de recherches actives, débouchant notamment sur des applications en cryptographie.



Contact : maths_pour_tous@univ-rouen.fr