Pourquoi les bulles sont-elles rondes ?

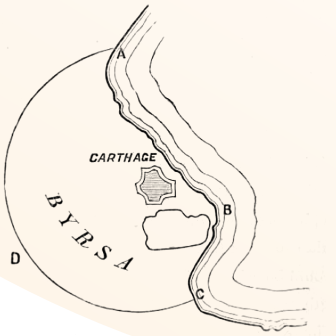
Blowing bubbles, Charles Joshua Chaplin (1825-1891)

Les problèmes isopérimétriques : comment obtenir un maximum en économisant sur les bords.

Didon, Carthage et la peau de bœuf

La légende raconte que la ville de Carthage fut fondée en 814 av. J.-C. par la princesse Didon. Elle obtint du roi de Numidie « autant de terre qu'elle pourrait en faire tenir dans la peau d'un bœuf ».

Didon fit découper la peau en fines lamelles qu'elle mit bout à bout afin d'en faire une longue lanière. Puis elle fit étendre cette lanière sur un demi-cercle dont les deux extrémités touchaient la côte. Didon avait intuitivement trouvé la solution au problème isopérimétrique dans un demi-plan !



Didon faisant couper la peau d'un bœuf en fines lamelles pour entourer un domaine le plus grand possible. Gravure de Matthäus Merian l'ancien, 1630.

Inégalité isopérimétrique dans le plan

Quelle est la plus grande surface plane que l'on peut délimiter par une corde de longueur donnée ?

Ce problème intéresse les mathématiciens depuis l'antiquité, et les grecs anciens avaient déjà deviné la réponse : la forme optimale est le **cercle**. Pourtant, il fallut attendre le XIXe siècle pour trouver la première démonstration de ce résultat.

$$S = \frac{L^2}{16} = 0{,}0625\,L^2$$

L'**inégalité isopérimétrique** dit précisément que, quelle que soit la forme que l'on entoure avec une corde de longueur L, la surface entourée S vérifie toujours

$$S = \frac{\sqrt{3}}{24} L^2 \approx 0{,}0722\,L^2$$

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

$$S = \frac{L^2}{4\pi} \approx 0{,}0796\,L^2$$

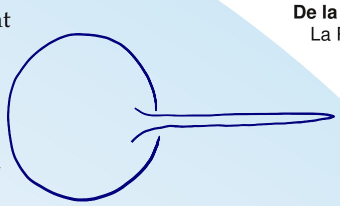
Et c'est une égalité seulement dans le cas du cercle !

Par ses propriétés physiques, la bulle de savon cherche à envelopper un volume d'air donné dans la surface la plus petite possible. Sa forme donne la solution du problème isopérimétrique en dimension 3 : la **sphère**.
Toute autre surface de même aire que la sphère délimite un volume plus petit que celle-ci.

$$V^2 \leq \frac{S^3}{36\pi}$$

Les objets presque optimaux sont-ils presque ronds ?

Dans le plan, une figure pour laquelle l'inégalité isopérimétrique est presque une égalité est forcément très proche d'un cercle. Dans l'espace c'est moins évident, comme le suggère cette sphère à laquelle on a rajouté un nez long et fin : la surface et le volume sont très proches de ceux de la sphère, pourtant l'objet ne semble vraiment plus rond !



On peut démontrer toutefois qu'un objet de l'espace qui vérifie presque l'égalité $V^2=S^3/(36\pi)$ ne diffère d'une sphère que d'une partie de volume très petit. La version optimale de ce résultat a été démontrée en 2008 et publiée dans la prestigieuse revue *Annals of mathematics*.

Références

De la forme des bulles de savon à celle des cristaux.
La Recherche 443, juillet-août 2010.

L'inégalité isopérimétrique
Benoît Kloeckner. Images des Mathématiques, CNRS, 2009.
http://images.math.cnrs.fr/L-inegalite-isoperimetrique.html

LMRS Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
Université de Rouen
CNRS dépasser les frontières
Contact : maths_pour_tous@univ-rouen.fr