

Géométrie aléatoire

La géométrie aléatoire porte sur les propriétés statistiques de figures géométriques tirées au hasard : des points, des droites, des polygones,... Ce champ de la théorie des probabilités trouve des applications dans de nombreux domaines :

astrophysique, biologie, écologie, imagerie, réseaux de télécommunications...

L'aiguille de Buffon (1733)

Si on laisse tomber au hasard une aiguille de longueur a sur un parquet dont les lattes sont de largeur $l > a$, avec quelle probabilité l'aiguille tombe-t-elle à cheval sur deux lattes? Buffon montre que cette probabilité est donnée par

$$p = 2a / (l\pi).$$

On peut ainsi estimer la valeur de π en itérant l'expérience un grand nombre de fois. C'est la première rencontre entre la géométrie et les probabilités.



Des points au hasard

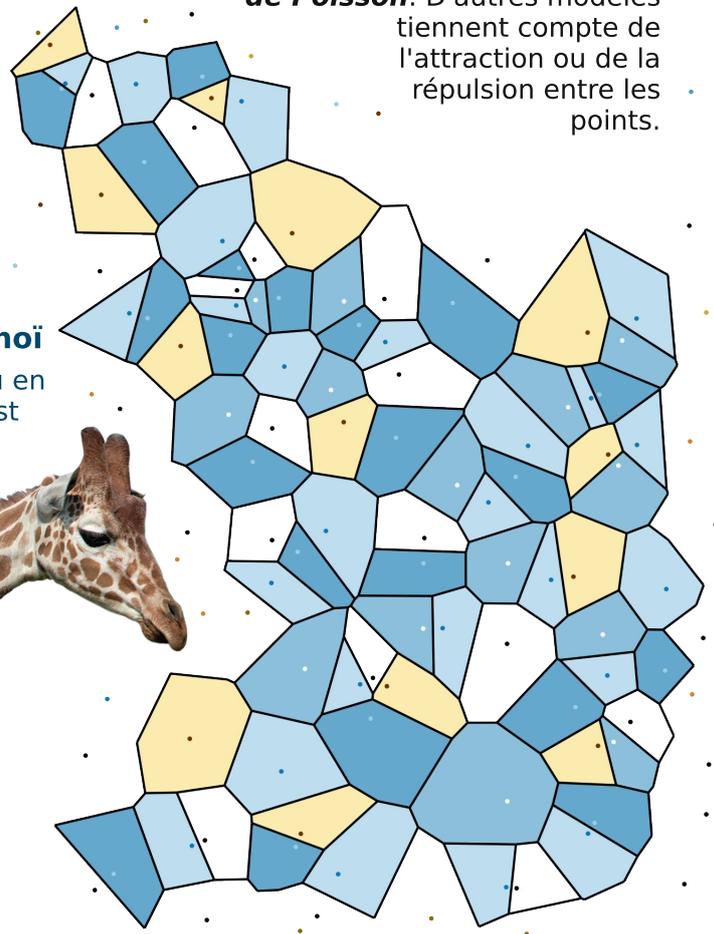
- Un concept de base en géométrie aléatoire est celui d'**ensemble aléatoire de points**. Dans le modèle le plus courant, le nombre moyen de points qui tombent dans une région donnée du plan est proportionnel à l'aire de la région, et la présence d'un point en un lieu donné ne dépend pas des positions des autres points. On l'appelle le **processus ponctuel de Poisson**. D'autres modèles tiennent compte de l'attraction ou de la répulsion entre les points.

Mosaïque de Voronoï

Une mosaïque aléatoire est un découpage du plan obtenu en faisant intervenir le hasard. L'exemple le plus classique est la **mosaïque de Voronoï** construite à partir d'un ensemble de points aléatoires appelés **germes**. Chaque germe détermine une **cellule**, constituée de la partie du plan à plus proche distance de ce germe que de n'importe quel autre. C'est un polygone convexe, dont chaque côté est une portion de la médiatrice du segment joignant deux germes.



Des mosaïques de Voronoï sont visibles dans la nature.



Applications aux réseaux téléphoniques

Les positions des relais téléphoniques sont représentées par un ensemble aléatoire de points (germes), et la zone de raccordement à chaque relais par la cellule associée au germe. Ce modèle permet par exemple d'estimer la distance moyenne au relais, et donc le coût moyen d'une communication.