



Document de synthèse
présenté par
MUSTAPHA MOURRAGUI
en vue de l'obtention du diplôme
d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : **Mathématiques – Probabilités**

**Comportements hydrodynamiques et grandes déviations des systèmes de
particules en interaction à l'équilibre et hors équilibre**

Soutenue le 30 novembre 2012

Composition du jury :

Francis COMETS	Professeur (Université de Paris 7), <i>Rapporteur</i>
Claude DELLACHERIE	Directeur de recherches (CNRS, Université de Rouen)
Claudio LANDIM	Directeur de recherches (CNRS, Université de Rouen et IMPA, Rio de Janeiro, Brésil)
Stefano OLLA	Professeur (Université de Paris Dauphine), <i>Rapporteur</i>
Errico PRESUTTI	Professeur (Università di Roma "Tor Vergata", Italie), <i>Rapporteur</i>
Ellen SAADA	Directrice de Recherches (CNRS, Université de Paris Descartes)

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude aux membres du jury : Francis Comets, Claude Dellacherie, Claudio Landim, Stefano Olla, Errico Presutti et Ellen Saada. Des remerciements tout particuliers vont à Francis Comets, Stefano Olla et Errico Presutti qui m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter sur ce mémoire. Je leur suis extrêmement reconnaissant du soin qu'ils y ont mis.

Je tiens à remercier chaleureusement mes amis et collaborateurs, membres de l'équipe systèmes de particules rouennaise (passée et actuelle) : Olivier Benois, Claudio Landim et Ellen Saada :

- Olivier pour son amitié constante, les discussions mathématiques et les collaborations en matière de recherche et d'enseignement,
- Claudio pour sa grande disponibilité, sa grande efficacité, et pour toutes les discussions sur les mathématiques et les collaborations que nous avons pu avoir. Chaque minute passée à discuter avec lui m'a été précieuse. Sa présence dans ce jury et le fait d'avoir accepté d'être garant de mon hdr me touche particulièrement,
- Ellen pour sa grande disponibilité, ses encouragements constants, ses collaborations et discussions scientifiques. Elle a été d'une aide précieuse. Je la remercie également pour la lecture minutieuse des premières versions de ce mémoire, ainsi que pour sa présence dans ce jury.

Je remercie également tous mes collaborateurs : Olivier Benois (Rouen), Lorenzo Bertini (Roma La Sapienza), Raffaele Esposito (L'Aquila), Jonathan Farfan (IMPA, Rio de Janeiro), Claudio Landim (Rouen et IMPA), Rossana Marra (Roma Tor Vergata), Enza Orlandi (Roma Tre), Ellen Saada (Paris Descartes), Sami Sellami (Rouen) et Livio Triolo (Roma Tor Vergata). Une partie non négligeable de ce travail est aussi la leur.

Pour leur soutien financier et l'organisation de manifestations scientifiques et de groupes de travail, j'adresse toute ma gratitude à l'ANR LHMSHE, GDR GREFI-MEFI et ANR SHEPI ainsi qu'à leurs responsables scientifiques, Thierry Bodineau, Pierre Picco et Ellen Saada.

Je remercie tous ceux qui font du laboratoire LMRS et du département de Mathématiques un cadre de travail aussi agréable.

Pour terminer, je dédie ce mémoire d'hdr avec toute mon affection à ma famille et surtout aux trois êtres qui me sont le plus chers : ma Maman et mes deux enfants Camilia et Soufiane.

Table des matières

1	Présentation générale	7
1.1	Introduction	7
1.2	Une brève description mathématique	10
1.3	Quelques systèmes de particules	13
1.3.1	Modèles à l'équilibre	14
1.3.2	Modèles à longue portée	19
1.3.3	Modèles hors équilibres	23
2	Les limites hydrodynamiques	25
2.1	Modèles hors équilibre avec réservoirs	27
2.2	Modèles à longue portée	35
2.3	Modèles non conservatifs	39
2.4	L'hydrodynamique en volume infini	40
3	Les grandes déviations	41
3.1	Modèles avec réservoirs	42
3.1.1	Exclusion simple faiblement asymétrique	42
3.1.2	Exclusion avec changement de vitesse	44
3.2	Modèles à longue portée avec désordre	45
3.2.1	Exclusion avec champ extérieur aléatoire et potentiel de Kac.	45
3.2.2	Modèle de Glauber avec champ extérieur aléatoire et potentiel de Kac.	45
3.3	Modèles à longue portée avec réservoirs	46
4	Perspectives	49
4.1	Modèles à longue portée avec réservoirs	49
4.2	Limites incompressibles	50
4.3	Les équations de réaction-diffusion	51

4.4 Références (avec les initiales des auteurs)	52
Liste des travaux présentés	53
Bibliographie	54

Chapitre 1

Présentation générale

1.1 Introduction

Cette synthèse de mes travaux de recherche s'articule autour des systèmes de particules, de leurs comportements hydrodynamiques et des grandes déviations. La liste des travaux est proposée en fin de rapport. Ce premier chapitre d'introduction contient une brève présentation des systèmes de particules ainsi que des notions de limite hydrodynamique et de grandes déviations. Nous exposerons ensuite une classe de systèmes de particules auxquels nous allons faire référence dans les chapitres suivants.

Un système de particules est un modèle stochastique qui décrit l'évolution de particules (en nombre fini ou infini) en interaction sur un réseau (fini ou infini) appelé ensemble des sites; au cours de l'évolution et à des instants aléatoires, les particules se déplacent (naissent, meurent, entrent en collision, . . .) sur le réseau selon une loi de probabilité qui dépend de la configuration des particules à cet instant. Ces modèles ont été introduits dans les années 70 [99, 100, 41, 42], d'une part pour des motivations probabilistes, et d'autre part suivant une approche physique (mécanique statistique, comportement aléatoire microscopique de molécules). Depuis, les systèmes de particules ont fait l'objet de nombreux travaux et ont donné lieu à une littérature abondante. Leurs domaines d'applications sont très nombreux : physique théorique, analyse d'images, biologie, sondages. . . Plusieurs ouvrages rassemblent les principaux aspects probabilistes de ces modèles, citons par exemple [82, 30, 49, 83], où sont étudiés l'existence de ces processus de Markov en volume infini avec différentes constructions, ainsi que l'existence de leurs mesures invariantes, l'ergodicité. . .

Une des principales motivations physiques de l'étude de la limite hy-

hydrodynamique provient d'une branche de la mécanique statistique. L'objet est de caractériser l'équation régissant l'évolution macroscopique d'un fluide ou d'un gaz à partir d'une dynamique microscopique aléatoire : en vertu du grand nombre de particules qu'il contient, la description de l'évolution d'un fluide dans un volume doit se faire à travers un ensemble de variables macroscopiques qui le caractérisent. Au niveau microscopique, l'évolution des molécules est modélisée sur le volume discrétisé par une dynamique aléatoire (système de particules) ; après changement d'échelle (renormalisation en espace et en temps), les quantités conservées par cette dynamique microscopique donnent par passage à la limite dite hydrodynamique des équations aux dérivées partielles appelées équations hydrodynamiques, qui décrivent l'évolution spatiale et temporelle des variables macroscopiques.

Nous distinguerons deux types de systèmes, à l'équilibre et hors équilibre. Les systèmes dits à l'équilibre sont les mieux compris et les plus largement étudiés, ce sont généralement des modèles évoluant sur un tore ou en volume infini, ou encore dans un domaine borné en contact avec des réservoirs dont la température est constante. Les mesures invariantes de tels systèmes sont généralement données par les mesures de Gibbs, obtenues à partir des conditions du bilan détaillé, qui traduisent la réversibilité du système. Les systèmes hors équilibre que nous considérerons dans ce mémoire sont des modèles de particules qui évoluent dans des domaines bornés, et qui sont maintenus hors équilibre par des réservoirs de particules à différentes températures aux bord du domaine. Les dynamiques des systèmes hors équilibre ne sont pas réversibles. La mesure stationnaire de tels processus est caractérisée par le flux de la masse de particules à travers le système.

D'un point de vue probabiliste, l'étude d'une limite hydrodynamique correspond à une loi des grands nombres (pour les mesures empiriques de répartition des particules). La méthode de production d'entropie, introduite par Guo, Papanicolaou & Varadhan dans [67] en 1984 et la méthode d'entropie relative initiée en 1991 par Yau dans [105] pour le processus de Ginzburg-Landau, ont permis de prouver le comportement hydrodynamique d'une grande variété de modèles. Ces méthodes reposent sur l'étude de l'évolution temporelle de l'entropie et de la forme de Dirichlet de l'état du système par rapport à certaines mesures de référence. Celles-ci correspondent aux états proches de l'équilibre, ou aux mesures produit dont le paramètre est solution de l'équation hydrodynamique.

La méthode d'entropie [67] a été étendue aux systèmes non gradient, c'est-à-dire pour lesquels le courant de particules entre deux sites ne s'exprime pas comme le gradient d'une fonction locale, par Varadhan en 1994

dans [103] et Quastel en 1992 dans [95]. Dans les livres [101, 35, 69, 94] sont développées les principales méthodes utilisées pour l'étude des comportements hydrodynamiques des systèmes de particules à l'équilibre. Enfin, les méthodes de [67, 104] ont été adaptées aux modèles hors équilibre [54, 55, 71, 75, 58, 90].

Une autre question d'intérêt en physique est la dérivation d'équations aux dérivées partielles qui ne sont pas invariantes par changement d'échelle, comme les équations de Navier-Stokes ; ces équations ne peuvent être obtenues comme limite hydrodynamique de systèmes de particules. Toutefois, différentes interprétations ont permis de développer des techniques permettant d'obtenir ces équations [43, 51, 52, 53, 78, 8, 7, 79, 6].

Une fois la limite hydrodynamique prouvée, des améliorations naturelles sont l'étude des fluctuations (théorème de la limite centrale) et des grandes déviations. Les livres [101, 69] fournissent une synthèse de quelques-uns de ces résultats pour les dynamiques à l'équilibre.

La théorie des grandes déviations a connu un grand développement suite aux travaux fondamentaux de Donsker & Varadhan [44, 45, 46, 47] pour les processus de Markov, et de Freidlin & Wentzell pour les perturbations aléatoires de systèmes dynamiques [60]. Depuis, elle a pris une place de plus en plus importante et ses techniques ont été très utilisées en mécanique statistique et pour les systèmes de particules en interaction. Les premiers résultats sur les grandes déviations autour de la limite hydrodynamique pour des gaz sur réseau ont été introduits par Donsker & Varadhan [48] pour des modèles de diffusion comme le processus de Ginzburg-Landau, et par Kipnis, Olla & Varadhan [72] pour le processus d'exclusion simple symétrique. Les techniques utilisées dans ces articles ont été reprises et développées dans les livres de Kipnis & Landim [69] et de Spohn [101], où on trouvera également une bibliographie plus détaillée sur le sujet. Jusqu'alors, les fonctionnelles d'action (voir la sous-section 1.2) associées aux modèles considérés sont convexes et semi-continues inférieurement ; la convexité de la fonctionnelle d'action permet d'étendre plus simplement la borne inférieure des grandes déviations aux voisinages quelconques d'ouverts. Dans [96], Quastel, Rezakhanlou & Varadhan ont développé des techniques permettant d'obtenir un principe de grandes déviations pour des modèles où la fonctionnelle n'est pas convexe.

L'étude des grandes déviations pour les systèmes hors équilibres a connu une activité considérable ces dernières années. Les principales investigations ont porté sur les grandes déviations autour de la limite hydrodynamique et les grandes déviations pour le courant. Les techniques de [48] et [72] ont été adaptées dans [13] pour établir un principe de grandes déviations dynamiques

(cf. (1.2.2) et (1.2.3)) pour le modèle d'exclusion simple symétrique en dimension 1, où la fonctionnelle d'action est convexe. Notre contribution aux grandes déviations dans les résultats cités dans ce mémoire concerne l'extension des méthodes de [48, 72, 96] aux modèles hors équilibre et à longue portée pour lesquels les fonctionnelles ne sont pas convexes, et pour des modèles hors équilibres en toutes dimensions.

Les résultats sur les grandes déviations dynamiques peuvent être utilisés pour déterminer la fonctionnelle des grandes déviations pour la mesure stationnaire hors équilibre (grandes déviations statiques). Dans ce cadre, une approche macroscopique a été introduite par Bertini, de Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio & Landim dans [11, 12] en utilisant les fonctionnelles d'action des grandes déviations dynamiques. Ils ont développé une théorie des fluctuations dynamiques qui permet de caractériser la fonctionnelle de grandes déviations statiques par un principe variationnel associé aux fonctionnelles dynamiques, et par des équations de Hamilton-Jacobi en dimension infinie. Une formule explicite pour la fonctionnelle d'action a été obtenue pour une classe de modèles en dimension 1 dans [38, 39, 18]. Par ailleurs, en suivant la stratégie de Freidlin & Wentzell [60], Bodineau & Giacomin [25] d'une part, et Farfan [57] d'autre part, ont caractérisé la fonctionnelle d'action statique directement par le quasi-potentiel associé aux fonctionnelles de grandes déviations dynamiques.

Un autre sujet d'intérêt dans les investigations autour des systèmes hors équilibre est l'étude du flux de l'énergie ou du flux de particules à travers le système. Dans ce cadre plusieurs articles ont étudié les grandes déviations du courant dans les systèmes de particules hors équilibre, voir [22, 23, 24, 14, 15, 17] et les références qui s'y trouvent.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante : dans la prochaine sous-section, nous introduirons quelques systèmes de particules. Dans le chapitre 2, sont décrits les résultats que j'ai obtenu sur les limites hydrodynamiques. Mes travaux concernant les grandes déviations sont résumés et commentés dans le chapitre 3.

1.2 Une brève description mathématique

Du point de vue probabiliste, le modèle stochastique régissant l'évolution d'un système de particules sur un réseau S est un processus de Markov $(\omega_t)_{t \geq 0}$ d'espace d'états $\mathbb{X} = X^S$. La variable $t \in [0, +\infty)$ désigne le temps et à chaque instant t , l'application $\omega_t : S \rightarrow X$ représente l'état du système

à cet instant.

L'évolution d'un système de particules peut être décrite informellement de la manière suivante : on munit chaque site de S d'horloges exponentielles qui sont mutuellement indépendantes. Initialement des particules sont distribuées selon une loi de probabilité sur S , et à chaque fois qu'une horloge sonne en un site $x \in S$, les particules présentes en ce site sautent (s'échangent, meurent, naissent, entrent en collision, ...) selon des règles d'interactions qui caractérisent le modèle. Ces règles sont définies par des probabilités de transition et par des taux qui dépendent du nombre de particules et de leur répartition dans un voisinage du site x .

Nous considérerons dans ce mémoire trois types de processus : les modèles de sauts ou d'échanges de particules entre les sites du réseau S , les processus de naissances et de morts de particules, et enfin quelques modèles non conservatifs de spins de types Glauber et Blume-Capel, qui consistent à échanger les valeurs des spins ("spin-flips") sur chaque site. Pour $x \in S$ et $t \geq 0$, $\omega_t(x)$ représente respectivement le nombre de particules et la valeur du spin au site x à l'instant t . Lorsque $X = \mathbb{N}$, le nombre de particules par site est illimité, c'est le cas du processus de zero-range introduit par Spitzer [99, 100] et étudié en volume infini par Andjel [1]. Si X est fini, le nombre de particules ne peut pas excéder $|X|$ (pour un ensemble A , $|A|$ désigne le cardinal de A). Dans le cas de modèles de sauts régis par une règle d'exclusion, on parle de processus d'exclusion généralisées ; le cas particulier où $|X| = 2$ et le taux de saut est constant s'appelle le processus d'exclusion simple, qui est le plus souvent étudié (cf. [99, 100, 82, 83], ...).

Formellement le processus de Markov $(\omega_t)_{t \geq 0}$ est décrit par son générateur infinitésimal \mathcal{L} , l'opérateur linéaire de domaine \mathcal{S} :

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x f(\eta), \quad (1.2.1)$$

où pour tout $x \in S$, \mathcal{L}_x est la partie du générateur qui décrit les mouvements et les transitions de particules (ou de spins) autour du site x . L'évolution temporelle du processus $(\omega_t)_{t \geq 0}$ est définie par le semi-groupe $\{S(t), t \geq 0\}$ associé à l'opérateur \mathcal{L} . Nous avons les deux relations suivantes, pour tout $f \in \mathcal{S}$ et tout $\omega \in \mathbb{X}$,

$$S(t)f(\omega) = \mathbb{E}^{\delta_\omega} [f(\omega_t)], \quad \frac{d}{dt} S(t)f = S(t)\mathcal{L}f = \mathcal{L}S(t)f.$$

Ces dernières relations qui lient le générateur au semi-groupe sont les équations de Chapman-Kolmogorov.

La première question qui se pose naturellement est l'existence de tels processus : lorsque l'espace d'état \mathbb{X} est fini, la construction est garantie par la théorie des processus de Markov à espaces d'états finis (voir par exemple [84, 30]). Dans le cas contraire l'existence d'une large classe de processus a été démontrée par différentes méthodes de construction [82, 30, 49, 83].

Une fois l'existence du processus établie, se pose alors le problème de la caractérisation de ses mesures invariantes ou réversibles. Les mesures invariantes des systèmes à l'équilibre considérés dans ce mémoire sont données par les mesures de Gibbs et sont réversibles. La réversibilité se traduit par le fait que le générateur est autoadjoint dans l'espace L^2 muni du produit scalaire associé à la mesure de Gibbs. En revanche, pour les systèmes hors équilibre de réservoirs (qui maintiennent le système loin de l'équilibre), les mesures invariantes ne sont pas explicitement connues, ce qui rend les investigations plus difficiles.

Le passage à la limite hydrodynamique a pour but de déterminer la description macroscopique d'un gaz ou d'un fluide évoluant dans un volume V à partir d'une dynamique microscopique aléatoire [101, 69]. Au niveau macroscopique, physiquement, le système est caractérisé par des variables ρ^1, \dots, ρ^k . L'évolution de ces variables est régie par un système d'équations aux dérivées partielles, dont la variable $\rho = (\rho^1, \dots, \rho^k)$ est considérée dans un espace topologique \mathbb{V} . L'évolution de ρ est décrite par son semi-groupe $\{T(t) : t \geq 0\}$ défini sur son domaine $\mathbf{D} \subset \mathbb{V}$. Pour tout $t \geq 0$, $\rho_t = (\rho_t^1, \dots, \rho_t^k) = T(t)\rho_0$ désigne l'état du système à l'instant t et $\rho_0 = (\rho_0^1, \dots, \rho_0^k)$ est la condition initiale.

Le comportement macroscopique du système s'obtient après renormalisation en espace et en temps du système microscopique. Le changement d'échelle spatiale s'effectue en discrétisant le volume V . Au niveau microscopique, pour chaque entier $N \geq 1$, un système de particules de générateur \mathcal{L}_N , évolue sur le volume microscopique V_N , où le paramètre de changement d'échelle est N^{-1} . Le changement d'échelle spatiale induit un changement d'échelle temporelle $t \mapsto a_N t$, qui correspond à une accélération du système de particules dans le temps par un facteur a_N , qui dépend de N . La dynamique microscopique est alors donnée par un processus de Markov $(\omega_t)_{t \geq 0}$ de générateur $a_N \mathcal{L}_N$ et de semi-groupe $\{S_N(t) : t \geq 0\}$. On observe deux types de modèles : les modèles dits hyperboliques sont obtenus par le changement d'échelle espace-temps $(x, t) \mapsto (x/N, Nt)$, et les modèles dits paraboliques, ou diffusifs sont obtenus par le changement d'échelle $(x, t) \mapsto (x/N, N^2t)$.

Dans l'esprit probabiliste, la limite hydrodynamique peut se traduire par

une convergence en loi : supposons qu'à chaque configuration microscopique ω soit associée une variable aléatoire π^N qui caractérise le système, $\pi^N(\omega) = (\pi^{N,1}(\omega), \dots, \pi^{N,k}(\omega))$. On dira que le comportement hydrodynamique est établi lorsqu'à partir d'un profil macroscopique initial ρ_0 défini sur V et d'une suite de configurations microscopiques $(\omega^N)_{N \in \mathbb{N}}$ qui converge en loi vers ρ_0 ; la suite de processus $\{(\pi^N(\omega_t^N))_{t \geq 0} : N \geq 1\}$ converge en loi vers les trajectoires déterministes $(T(t)\rho_0)_{t \geq 0}$.

La limite hydrodynamique peut être enrichie par l'existence d'un principe de grandes déviations : étant donné un profil macroscopique $\hat{\rho}$, on cherche à estimer la probabilité asymptotique pour que les variables aléatoires π^N se trouvent dans un voisinage de $\hat{\rho}$. Cette probabilité doit être exponentiellement petite, dans le sens où il existe une suite de réels $(r_N)_{N \in \mathbb{N}}$ appelée vitesse de convergence, et une fonctionnelle $\hat{\mathcal{I}}$ appelée fonctionnelle d'action définie sur l'espace topologique \mathbb{V} , vérifiant les deux bornes suivantes :

1. *Borne supérieure.* Pour tout fermé F de \mathbb{V} ,

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{r_N} \log \mathbb{P}^N(\pi^N \in F) \leq - \inf_{\pi \in F} \hat{\mathcal{I}}(\pi), \quad (1.2.2)$$

2. *Borne inférieure.* Pour tout ouvert O de \mathbb{V}

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{r_N} \log \mathbb{P}^N(\pi^N \in O) \geq - \inf_{\pi \in O} \hat{\mathcal{I}}(\pi). \quad (1.2.3)$$

où \mathbb{P}^N désigne la loi du processus $(\pi^N(\omega_t^N))_{t \geq 0}$ et la suite $(r_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est telle que $\lim_{N \rightarrow \infty} r_N = \infty$. La fonctionnelle $\hat{\mathcal{I}}$ est semi-continue inférieurement ; si de plus, elle admet des ensembles de niveaux $(\{\hat{\mathcal{I}} \leq a\}, a \in \mathbb{R})$ compacts, elle est dite une "bonne" fonctionnelle d'action.

1.3 Quelques systèmes de particules

Les systèmes de particules les plus fréquemment utilisés modélisent l'évolution d'un gaz sur un réseau ("stochastic lattice gas"). Dans cette sous-section, nous allons décrire quelques modèles cités dans la suite du mémoire.

On se place en dimension $d \geq 1$ et on fixe un entier N assez grand. Pour tout entier $k \geq 1$, on note \mathbb{T}_N^k le tore discret k -dimensionnel de taille N . Suivant les modèles à étudier, l'ensemble des sites S peut désigner le tore \mathbb{T}_N^d , le réseau \mathbb{Z}^d , ou encore le cylindre $\Omega_N = \{-N+1, \dots, N-1\} \times \mathbb{T}_N^{d-1}$ de \mathbb{Z}^d de hauteur $2N-1$ et de base \mathbb{T}_N^{d-1} . Dans ce dernier cas, on note $\Gamma_N = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}_N^{d-1} \mid x_1 = \pm(N-1)\}$ le bord de Ω_N .

1.3.1 Modèles à l'équilibre

Nous décrivons brièvement ici les processus de zero-range, d'exclusion, de Kawasaki et celui de Glauber, et nous nous intéressons également aux modèles de Blume-Capel. Les taux de sauts de ces modèles satisfont aux conditions du bilan détaillé (en anglais “detailed balance conditions”), les mesures sont réversibles et données par la mesure de Gibbs.

Dans ce qui suit, $p : S \times S \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité de transition à portée finie, invariante par translation et spatialement ergodique et on note

$$p(x, y) = p(0, y - x) =: p(y - x), \quad \forall (x, y) \in S \times S. \quad (1.3.1)$$

Processus de zero-range. Cette dynamique est décrite par un processus de Markov $(\eta_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{X} = \mathbb{N}^S$; pour chaque site $x \in S$, $\eta_t(x)$ désigne le nombre de particules présentes au site x à l'instant t . On considère une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $g(0) = 0$ et $g(k) > 0$ pour tout $k \geq 1$, appelée taux ou fonction de saut. Le mouvement des particules pour le processus de zero-range suit le mécanisme suivant : si le système est dans l'état $\eta \in \mathbb{X}$, le site x est occupé par $\eta(x)$ particules. Une particule va quitter x avec le taux $g(\eta(x))$, elle est éjectée vers un site y avec probabilité $p(x, y)$. Le générateur infinitésimal \mathcal{L} du processus de zero-range à taux $g(\cdot)$ et de probabilité de transition p peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x f(\eta), \quad (1.3.2)$$

où pour tout $x \in S$,

$$\mathcal{L}_x f(\eta) = \sum_{y \in S} p(x, y) g(\eta(x)) [f(\eta^{x,y}) - f(\eta)],$$

et pour $x, y \in S$, $\eta^{x,y}$ est la nouvelle configuration obtenue à partir de la configuration η après le saut d'une particule du site x au site y :

$$(\eta^{x,y})(z) := \begin{cases} \eta(x) - 1 & \text{si } z = x \\ \eta(y) + 1 & \text{si } z = y \\ \eta(z) & \text{si } z \neq x, y. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

L'existence du processus de zero-range en volume infini est démontrée par Andjel dans [1]. Ses mesures invariantes sont caractérisées dans ce même article, elles sont données par une famille $(\nu_\varphi)_{0 \leq \varphi < \varphi^*}$ de mesures produit sur \mathbb{X} de marginales

$$\nu_\varphi(\eta(x) = k) = \frac{1}{Z(\varphi)} \frac{\varphi^k}{g(k)!}, \quad x \in S, k \in \mathbb{N}, \quad (1.3.4)$$

où $g(0)! = 1$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g(k)! = g(1) \cdots g(k)$. La fonction de renormalisation $Z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est donnée par la série entière

$$Z(\varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^k}{g(k)!}$$

et φ^* est son rayon de convergence.

Modèles d'exclusion. Ce processus de Markov $(\eta_t)_{t \geq 0}$ a pour espace d'états $\mathbb{X} = \{0, \dots, \kappa\}^S$, où $\kappa \geq 1$ est un entier fixé qui désigne le nombre maximum de particules par site. La règle de l'exclusion est la suivante : lorsque le système est dans l'état $\eta \in \mathbb{X}$, le taux avec lequel un site $x \in S$ qui contient au moins une particule éjecte une particule vers un site y , qui contient strictement moins de κ particules est $p(x, y)r_{x,y}(\eta)$, où la fonction $r_{x,y}(\eta)$ dépend des occupations des sites x, y et de leurs voisins. Lorsque $\eta(x) = 0$ ou $\eta(y) = \kappa$ le saut de x vers y est impossible.

Le générateur infinitésimal du processus de Markov $(\eta_t)_{t \geq 0}$ est défini par

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x f(\eta),$$

où

$$\mathcal{L}_x f(\eta) = \sum_{y \in S} p(x, y)r_{x,y}(\eta) \mathbb{1}_{\{\eta(x) > 0, \eta(y) < \kappa\}} [f(\eta^{x,y}) - f(\eta)],$$

avec $\eta^{x,y}$ définie dans (1.3.3). Nous nous intéresserons à trois types de ces modèles :

- *La κ -exclusion symétrique.* C'est le cas particulier où $r_{x,y} \equiv 1$ et la probabilité de transition p est symétrique et vérifie (1.3.1). Les mesures réversibles pour ces modèles sont les mesures produit sur S paramétrées par $\varphi \geq 0$ et de marginales

$$\nu_\varphi(\eta ; \eta(x) = k) = \frac{\varphi^k}{1 + \varphi + \dots + \varphi^\kappa}, \quad k \in \{0, \dots, \kappa\}. \quad (1.3.5)$$

- *L'exclusion simple.* C'est le cas où $\kappa = 1$ et $r_{x,y} \equiv 1$, le taux de saut peut s'écrire $p(x, y)\eta(x)(1 - \eta(y))$. Le générateur est défini par

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x f(\eta), \quad (1.3.6)$$

où

$$\mathcal{L}_x f(\eta) = \sum_{y \in S} p(x, y) \eta(x) (1 - \eta(y)) [f(\eta^{x,y}) - f(\eta)].$$

Remarquons qu'ici $\eta^{x,y}$ peut être définie comme la configuration $T^{x,y}\eta$ obtenue à partir de η après avoir échangé l'occupation du site x avec celle du site y :

$$(T^{x,y}\eta)(z) := \begin{cases} \eta(y) & \text{si } z = x \\ \eta(x) & \text{si } z = y \\ \eta(z) & \text{si } z \neq x, y. \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Les mesures invariantes pour cette dynamique sont les mesures produit de Bernoulli définies dans (1.3.17) pour $\alpha \equiv 0$.

- *L'exclusion avec changement de vitesse.* Le taux de saut $r_{x,y}$ ne dépend pas que de l'occupation des deux sites x et y , mais aussi de celle des sites voisins de x et y . On considère le cas de sauts à plus proche voisin et pour simplifier la description on se place sur le tore \mathbb{T}_N^d . On note (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{R}^d .

Le cas que nous considérons ici est construit de telle sorte qu'il soit *gradient*, c'est-à-dire que le *courant de particules* à travers deux sites voisins $x, x + e_i$, défini par

$$W_{x, x+e_i}(\eta) = r_{x, x+e_i}(\eta) - r_{x+e_i, x}(\eta) \quad 1 \leq i \leq d \quad (1.3.8)$$

s'écrit comme la différence d'une fonction locale et de sa translatée. Pour $a > -1/2$, le taux de saut est

$$r_{x, x+e_i}(\eta) = 1 + a\{\eta(x - e_i) + \eta(x + 2e_i)\}.$$

Le générateur infinitésimal du processus de Markov est donné par

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \mathcal{L}_x f(\eta). \quad (1.3.9)$$

où

$$\mathcal{L}_x f(\eta) = \sum_{i=1}^d r_{x, x+e_i}(\eta) [f(T^{x, x+e_i}\eta) - f(\eta)]. \quad (1.3.10)$$

Comme pour l'exclusion simple, les mesures invariantes pour cette dynamique sont les mesures produit de Bernoulli définies dans (1.3.17) avec $\alpha \equiv 0$.

- *L'exclusion simple faiblement asymétrique.* Il s'agit d'une perturbation de l'exclusion simple symétrique. Étant donnée une fonction régulière $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, l'interaction locale entre les particules est déterminée par l'hamiltonien $H_{h,N}$ défini sur \mathbb{X} par

$$H_{h,N}(\eta) = - \sum_{x \in S} h(x/N)\eta(x).$$

Le processus d'exclusion faiblement asymétrique perturbé par l'hamiltonien $H_{h,N}$ et à plus proche voisin sur S est défini par son générateur infinitésimal $\mathcal{L} = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x$, où pour tout $x \in S$,

$$\mathcal{L}_x f(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{z \in S \\ |Z|=1}} e^{-\frac{1}{2}(H_{h,N}(T^{x,x+z}\eta) - H_{h,N}(\eta))} [f(T^{x,x+z}\eta) - f(\eta)],$$

Le cas particulier que nous avons étudié dans l'article [20] (voir section 3), correspond à une fonction linéaire $h(u) = Eu + \lambda$ pour deux réels fixés E et λ . L'asymétrie faible est de l'ordre E/N , le générateur infinitésimal \mathcal{L} s'écrit sous la forme

$$\mathcal{L}_x f(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} \sum_{\substack{z \in S \\ |Z|=1}} e^{-E/(2N)(\eta(x+z) - \eta(x))} [f(T^{x,x+z}\eta) - f(\eta)]. \quad (1.3.11)$$

Un modèle avec désordre : *l'exclusion avec champ extérieur aléatoire.* On définit un espace d'environnements $(E_a, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, où $E_a = [-a, a]^S$ pour un réel $a > 0$. On suppose que \mathbf{P} est une probabilité produit et stationnaire. On notera $(\alpha(x))_{x \in S} \in E_a$ une configuration typique de E_a (c'est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées) appelée champ magnétique. Ce modèle décrit l'évolution d'un système de particules avec au plus une particule par site. L'espace d'états est $\mathbb{X} = \{0, 1\}^S$.

Étant donnée une réalisation $\alpha \in E_a$ du champ magnétique, l'interaction locale entre les particules est déterminée par l'hamiltonien H^α défini sur \mathbb{X} par

$$H^\alpha(\eta) = - \sum_{x \in S} \alpha(x)\eta(x). \quad (1.3.12)$$

Le processus d'exclusion avec désordre, symétrique et à plus proche voisin sur S est défini par son générateur infinitésimal $\mathcal{L} = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x$, où pour tout $x \in S$,

$$\mathcal{L}_x f(\eta) = \sum_{\substack{z \in S \\ |Z|=1}} C^\alpha(x, x+z; \eta) [f(T^{x,x+z}\eta) - f(\eta)], \quad (1.3.13)$$

$T^{x,y}\eta$ est définie par (1.3.7) et les taux $C^\alpha(x, x+z; \eta)$ par

$$C^\alpha(x, x+z; \eta) = \Phi \{ H^\alpha(T^{x,x+z}\eta) - H^\alpha(\eta) \} .$$

La fonction Φ est régulière, elle satisfait $\Phi(0) = 1$ et *la relation du bilan détaillé*

$$\Phi(E) = \exp(-E)\Phi(-E) . \quad (1.3.14)$$

La probabilité de transition p définie par (1.3.1) est donnée dans ce cas par $p(z) = 1/(2d)$, pour tout $z \in S$, $|z| = 1$. D'autre part, la relation (1.3.14) est équivalente à l'existence d'une fonction ψ régulière telle que

$$\Phi(E) = \exp(-E/2)\psi(E), \quad \psi(E) = \psi(-E), \quad \psi(0) = 1 .$$

Le cas le plus utilisé dans la littérature est

$$\Phi(E) = \exp(-E/2), \quad (1.3.15)$$

c'est aussi ce cas que nous considérons.

Pour tout paramètre $\lambda > 0$, on note $\mu^{\alpha,\lambda}$ la mesure de Gibbs sur \mathbb{X} associée à l'hamiltonien H^α , de potentiel chimique λ :

$$\mu^{\alpha,\lambda}(\eta) = \frac{1}{Z^{\alpha,\lambda}} \exp\{-H^\alpha(\eta) + \lambda \sum_{x \in S} \eta(x)\}, \quad \eta \in \mathbb{X}, \quad (1.3.16)$$

où $Z^{\alpha,\lambda}$ est la constante de normalisation. Remarquons que $\mu^{\alpha,\lambda}$ n'est autre qu'une mesure produit de Bernoulli sur \mathbb{X} ,

$$\mu^{\alpha,\lambda}(\eta(x) = 1) = \frac{e^{\alpha(x)+\lambda}}{1 + e^{\alpha(x)+\lambda}} = 1 - \mu^{\alpha,\lambda}(\eta(x) = 0), \quad (1.3.17)$$

pour tout $x \in S$. D'autre part, la relation (1.3.14) assure la réversibilité de ces mesures par rapport au générateur \mathcal{L} : pour tous $f, g \in \mathcal{S}$

$$\langle f, \mathcal{L}g \rangle_{\mu^{\alpha,\lambda}} := \sum_{\eta \in S} \mu^{\alpha,\lambda}(\eta) f(\eta) \mathcal{L}g(\eta) = \langle \mathcal{L}f, g \rangle_{\mu^{\alpha,\lambda}},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mu^{\alpha,\lambda}}$ désigne le produit scalaire de $L^2(\mu^{\alpha,\lambda})$. Lorsque la réalisation α est constante, on retrouve l'exclusion simple symétrique.

1.3.2 Modèles à longue portée

Il s'agit ici de modèles d'exclusion ou de spins perturbés par un potentiel d'interaction de Kac. Fixons un entier N assez grand. Un potentiel de Kac est une fonction $J_N(\cdot)$ définie sur \mathbb{R}^d telle que

$$J_N(u) = N^{-d}J(u/N), \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}^d, \quad (1.3.18)$$

où $J \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ est une fonction symétrique, positive, à support compact dans la boule unité et normalisée, c'est-à-dire $\int_{\mathbb{R}^d} J(u)du = 1$.

Le potentiel d'interaction de Kac a été introduit dans [68] et généralisé dans [81] afin de fournir une analyse rigoureuse de la théorie de transition de phase de Van der Waals. Depuis, la littérature sur le sujet est devenue importante. Citons seulement quelques résultats sur l'évolution macroscopique des dynamiques conservatives [64, 65, 66, 85] ou non-conservatives [31, 33, 85, 9]. L'étude pour N grand mais fixé a aussi fait l'objet de plusieurs articles, nous en citons quelques-uns où le modèle avec champ extérieur aléatoire a été considéré [26, 21, 29, 80, 27, 28]. Nous renvoyons au livre de E. Presutti [94] pour une étude synthétique et bibliographique.

Nous considérons dans cette section les modèles avec potentiel de Kac sur le tore ou sur \mathbb{Z}^d . Une autre version du potentiel de Kac pour des modèles qui évoluent sur un domaine borné avec réservoirs est définie dans la section 3 (cf. [34, 91]).

Modèle d'exclusion avec désordre soumis au potentiel d'interaction de Kac. On se place sur le tore $S = \mathbb{T}_N^d$. On reprend le modèle d'exclusion avec désordre décrit dans la sous-section 1.3.1. Étant donné une réalisation $\alpha \in E_a$ du champ magnétique et un paramètre $\beta > 0$ qui désigne l'inverse de la température $T = 1/\beta$, on définit l'hamiltonien $H_N^{\beta,\alpha}$ sur \mathbb{X} par la somme de deux hamiltoniens :

$$H_N^{\beta,\alpha}(\eta) = \beta H_N(\eta) + H^\alpha(\eta), \quad (1.3.19)$$

où H^α représente l'interaction locale définie par (1.3.12) et H_N est l'interaction de longue portée de Kac donnée par

$$H_N(\eta) = -\frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S \times S} J_N(x-y)\eta(x)\eta(y).$$

Notons $\mu_N^{\beta,\alpha,\lambda}$ les mesures de Gibbs sur \mathbb{X} associées à l'hamiltonien $H_N^{\beta,\alpha}$ de potentiel chimique $\lambda \in \mathbb{R}$ et à température $T = \beta^{-1}$:

$$\mu_N^{\beta,\alpha,\lambda}(\eta) = \frac{1}{Z_N^{\beta,\alpha,\lambda}} \exp\{-H_N^{\beta,\alpha}(\eta) + \lambda \sum_{x \in S} \eta(x)\} \quad \eta \in \mathbb{X}, \quad (1.3.20)$$

où $Z_N^{\beta,\alpha,\lambda}$ est le facteur de normalisation.

La dynamique d'exclusion (ou de Kawasaki) avec désordre à l'inverse de température $\beta > 0$ est le processus de Markov sur \mathbb{X} défini par son générateur $\mathcal{L}^{N,\beta,\alpha}$, agissant sur les fonctions $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{L}^{N,\beta,\alpha} f(\eta) = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x^{N,\beta,\alpha} f(\eta), \quad (1.3.21)$$

où

$$\mathcal{L}_x^{N,\beta,\alpha} f(\eta) = \sum_{\substack{z \in S \\ |z|=1}} C_N^{\beta,\alpha}(x, x+z; \eta) [f(T^{x,x+z} \eta) - f(\eta)] \quad (1.3.22)$$

et les taux $C_N^{\beta,\alpha}(x, x+z; \eta)$ sont définis par

$$C_N^{\beta,\alpha}(x, x+z; \eta) = \Phi \left\{ H_N^{\beta,\alpha}(T^{x,x+z} \eta) - H_N^{\beta,\alpha}(\eta) \right\},$$

où $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, (0, \infty))$ est définie comme dans (1.3.14). Les mesures $\mu_N^{\beta,\alpha,\lambda}$ sont réversibles pour le générateur $\mathcal{L}_N^{\beta,\alpha}$.

Un modèle non conservatif avec désordre. Il s'agit d'un modèle de spin-flip, où les valeurs possibles des spins sont $+1$ et -1 , appelé modèle de Glauber avec champ extérieur aléatoire.

On se place en dimension $d \geq 1$, sur $S = \mathbb{T}_N^d$. On définit un espace d'environnements $(E, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, avec une probabilité \mathbf{P} qu'on suppose stationnaire. On notera encore $\alpha = (\alpha(x))_{x \in S} \in E$ une configuration typique de E .

On se donne un réel $\beta > 0$ et une réalisation du champ magnétique $\alpha \in E$. Le modèle de Glauber avec potentiel de Kac et avec champ extérieur aléatoire, à température $1/\beta$, est un processus de Markov sur l'espace d'états $\mathbb{X} = \{-1, 1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ défini par son générateur infinitésimal

$$\mathbb{L}_N^{\beta,\alpha} f(\sigma) = \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \mathbb{L}_{N,x}^{\beta,\alpha} f(\sigma) = \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} c_N^{\beta,\alpha}(x, \sigma) [f(\sigma^x) - f(\sigma)], \quad (1.3.23)$$

où pour $\sigma \in \mathbb{X}$, $x \in \mathbb{T}_N^d$,

$$c_N^{\beta,\alpha}(x, \sigma) = \frac{\exp[-(1/2)(H_N^{\beta,\alpha}(\sigma^x) - H_N^{\beta,\alpha}(\sigma))]}{2 \cosh[(1/2)(H_N^{\beta,\alpha}(\sigma^x) - H_N^{\beta,\alpha}(\sigma))]},$$

σ^x est définie par

$$(\sigma^x)(z) := \begin{cases} -\sigma(x) & \text{si } z = x, \\ \sigma(z) & \text{si } z \neq x, \end{cases} \quad (1.3.24)$$

et l'hamiltonien $H_N^{\beta,\alpha}$ est défini par la formule (1.3.19). On considère la mesure de Gibbs associée à l'hamiltonien $H_N^{\beta,\alpha}$ définie dans (1.3.20) avec $\lambda = 0$:

$$\mu_N^{\beta,\alpha}(\sigma) = \frac{1}{Z_N^{\beta,\alpha}} \exp\{-H_N^{\beta,\alpha}(\sigma)\} \quad \sigma \in \mathbb{X}, \quad (1.3.25)$$

où $Z_N^{\beta,\alpha}$ est le facteur de normalisation. On vérifie que $\mu_N^{\beta,\alpha}$ satisfait à la condition (1.3.14) et par conséquent l'opérateur $\mathbb{L}_N^{\beta,\alpha}$ est autoadjoind dans $L^2(\mu_N^{\beta,\alpha})$.

Modèles de Blume-Capel soumis au potentiel de Kac. On se place sur $S = \mathbb{Z}^d$ et on fixe un entier N assez grand. Le modèle de Blume-Capel est un modèle de spins prenant les valeurs $-1, 0, +1$. L'ensemble des configurations est $\mathbb{X} = \{-1, 0, +1\}^S$ et la variable du spin, pour chaque configuration $\sigma \in \mathbb{X}$ en chaque site x , est notée $\sigma(x)$. L'interaction de Kac est définie par

$$H_{N,J}(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S \times S} J_N(x-y) \sigma(x) \sigma(y) - \lambda_1 \sum_{x \in S} \sigma(x) - \lambda_2 \sum_{x \in S} \sigma^2(x), \quad (1.3.26)$$

où λ_1 et λ_2 sont deux paramètres réels.

On distingue deux modèles de Blume-Capel (BCM) : une dynamique conservative de type Kawasaki, qui échange les valeurs des spins entre les sites, et une seconde dynamique non conservative de type Glauber.

Modèle conservatif. On se place dans le cadre des échanges de spins entre sites à plus proche voisin. Le processus de Blume-Capel conservatif de paramètre $\beta \geq 0$ est le processus de Markov sur \mathbb{X} défini par son générateur $\mathcal{L}_N^{\beta,\alpha}$, agissant sur les fonctions $f \in \mathcal{S}$ par

$$\left(\mathcal{L}_N^{\beta,\alpha} f \right) (\sigma) = \sum_{x \in S} \sum_{\substack{z \in S \\ |z|=1}} C_{N,\beta}(x, x+z; \sigma) [f(T^{x,x+z} \sigma) - f(\sigma)],$$

où les taux $C_{N,\beta}(x, x+z; \sigma)$ sont définis par

$$C_{N,\beta}(x, x+z; \sigma) = \Phi \left\{ \beta (H_{N,J}(T^{x,x+z} \sigma) - H_{N,J}(\sigma)) \right\}$$

et $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, (0, \infty))$ est définie comme dans (1.3.14). Notons que les différences $[H_{N,J}(T^{x,x+z} \sigma) - H_{N,J}(\sigma)]$ sont bien définies puisqu'elles ne font intervenir qu'un nombre fini de termes non nuls de $H_{N,J}$.

La dynamique de Kawasaki possède deux quantités conservées, les moyennes empiriques de σ et de σ^2 , correspondant respectivement à la magnétisation locale et à la concentration locale. Les mesures invariantes de Gibbs seront donc paramétrées par deux potentiels chimiques.

Les mesures invariantes pour la dynamique lorsque $\beta = 0$ jouent un rôle important dans l'étude du comportement hydrodynamique. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d$ le sous-réseau de \mathbb{Z}^d de taille $(2n+1)^d$, $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^d$. Pour $A = (a, b) \in [-1, 1] \times [0, 1]$, soit $\bar{\nu}_A$ la mesure produit sur $\mathbb{X} = \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ de potentiel chimique A telle que pour tout entier naturel $n \geq 1$, la restriction $\bar{\nu}_{A,n}$ de $\bar{\nu}_A$ à $\{-1, 0, 1\}^{\Lambda_n}$ soit égale à

$$\bar{\nu}_{A,n}(\sigma) = Z_{A,n}^{-1} \exp \left\{ a \sum_{i \in \Lambda_n} \sigma(i) + b \sum_{i \in \Lambda_n} \sigma^2(i) \right\}, \quad (1.3.27)$$

où $Z_{A,n}$ est la constante de normalisation. La collection $(\bar{\nu}_A)_{A \in [-1,1] \times [0,1]}$ forme une famille de mesures de probabilité réversibles pour la dynamique de Blume-Capel de type Kawasaki pour $\beta = 0$.

Modèle non conservatif. Pour tout site $x \in \mathbb{Z}^d$ et toute fonction $f \in \mathcal{S}$, posons

$$(\nabla_x^\pm f)(\sigma) = [f(\sigma^{\pm,x}) - f(\sigma)],$$

où la configuration $\sigma^{\pm,x}$ est obtenue à partir de σ en échangeant la valeur du spin $\sigma(x)$ au site x comme suit :

$$(\sigma^{\pm,x})(z) := \begin{cases} \sigma(x) \pm 1 \bmod 3 & \text{si } z = x \\ \sigma(z) & \text{si } z \neq x. \end{cases}$$

Le générateur de la dynamique de Blume-Capel, de type Glauber, est donné par

$$(\mathbb{L}_N^{G,\beta} f)(\sigma) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} C_N^{G,\pm}(x; \sigma) [(\nabla_x^\pm f)(\sigma)], \quad (1.3.28)$$

où les taux $C_N^{G,\pm}(x; \sigma)$ sont définis par

$$C_N^{G,\pm}(x; \sigma) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \exp \left(\beta (\nabla_x^\pm H_{N,J}) \right)}.$$

Remarquons que la fonction $\Phi(E) = \frac{1}{2} [1 + \exp E]^{-1}$ définissant les taux de flips vérifie la condition du bilan détaillé (1.3.14).

Pour l'existence et la construction de ces processus de Blume-Capel, nous renvoyons à [82].

1.3.3 Modèles hors équilibres

Modèle avec réservoirs. Il s'agit ici des processus qui évoluent sur un domaine borné avec des réservoirs de particules au bord. On se place sur un cylindre et on note Γ_N le bord de Ω_N . Nous considérons la superposition de deux dynamiques, de générateur qui s'écrit sous la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_b. \quad (1.3.29)$$

La première dynamique décrit l'évolution des particules à l'intérieur du domaine Ω_N , généralement par un des modèles décrits dans le paragraphe 1.3.1. La seconde dynamique modélise l'action des réservoirs au bord, elle consiste à imposer une densité égale à une fonction $b(\cdot)$ définie au voisinage du bord Γ_N , et son générateur est noté \mathcal{L}_b . C'est une dynamique de naissances et de morts de particules, construite de telle façon que sa mesure invariante soit de densité imposée égale à $b(\cdot)$.

Processus de sauts, de naissances et de morts. D'autres modèles microscopiques dont on ne connaît pas explicitement les mesures invariantes et qui ont un grand intérêt sont les processus de sauts, de naissances et de morts. Ils sont également décrits sur l'espace des sites S par la superposition de deux dynamiques, les générateurs sont de type (1.3.29). Contrairement aux modèles précédents, les deux parties \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_b agissent sur la totalité de l'espace S .

On se place sur le tore discrétisé \mathbb{T}_N^d , l'espace d'état est $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{T}_N^d}$. Les particules évoluent selon des marches aléatoires symétriques indépendantes, et sujettes à naissances et morts : nous fixons $p \in \mathbb{N}$, en chaque site x , l particules ($l \leq p$) peuvent être créées avec un taux de naissance $b_l(\eta(x))$ ou une particule peut mourir avec un taux $d(\eta(x))$, où $(b_l(\cdot))_{1 \leq l \leq p}$ et $d(\cdot)$ sont des fonctions définies sur \mathbb{N} vérifiant $b_l(0) = d(0) = 0$ et $\eta(x)$ désigne le nombre de particules présentes au site x . Pour obtenir une équation hydrodynamique, qui tienne compte des sauts de particules nous accélérons les sauts de particules par N^2 . Le générateur du système de particules s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^N f)(\eta) &= N^2(\mathcal{L}_0^N f)(\eta) + (\mathcal{L}_p^N f)(\eta) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \{N^2(\mathcal{L}_{0,x}^N f)(\eta) + (\mathcal{L}_{p,x}^N f)(\eta)\}, \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

où pour tout $x \in \mathbb{T}_N^d$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{0,x}^N f)(\eta) &= \sum_{\substack{z \in \mathbb{T}_N^d \\ |z|=1}} \eta(x) [f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta)], \\
(\mathcal{L}_{p,x}^N f)(\eta) &= \sum_{l=1}^p b_l(\eta(x)) [f(\eta^{x,+l}) - f(\eta)] \\
&\quad + d(\eta(x)) [f(\eta^{x,-}) - f(\eta)],
\end{aligned} \tag{1.3.31}$$

pour tous $\eta \in \mathbb{X}$, $x, y \in \mathbb{T}_N^d$,

$$\eta^{x,+l}(z) := \begin{cases} \eta(x) + l & \text{si } z = x \\ \eta(z) & \text{si } z \neq x. \end{cases}$$

$$\eta^{x,-}(z) := \begin{cases} \eta(x) - 1 & \text{si } z = x \\ \eta(z) & \text{si } z \neq x \end{cases}$$

et $\eta^{x,y}$ est définie par (1.3.3).

Ces modèles donnent par passage à la limite hydrodynamique des équations de *réaction-diffusion*.

Chapitre 2

Les limites hydrodynamiques

Mathématiquement, la limite hydrodynamique se traduit par une convergence en loi (voir section 1.2). On rencontre deux types de modèles, les modèles gradient et les modèles non gradient. Un modèle est dit gradient lorsque le courant microscopique entre deux sites voisins x et y (i.e. la différence entre le taux de saut -ou d'échange- d'une particule de x vers y et le taux de saut de y vers x) s'exprime comme la différence d'une fonction microscopique locale et de sa translatée. La dérivation de la limite hydrodynamique pour les systèmes conservatifs nécessite d'établir les "lemmes de remplacement" (estimées de blocs) qui permettent de remplacer cette fonction locale par une fonction de la densité empirique. Pour les modèles non gradient, le courant n'étant pas différence d'une fonction et de sa translatée, l'étape cruciale pour établir la limite hydrodynamique est de démontrer le remplacement du courant microscopique par le gradient discret d'une fonction du champ de la densité empirique.

Il existe deux méthodes pour établir une limite hydrodynamique, toutes les deux introduites pour des modèles à l'équilibre évoluant sur le tore. La première méthode, dite de *production d'entropie*, a été introduite par Guo, Papanicolaou & Varadhan [67] pour les modèles gradient. Elle repose sur l'étude de l'évolution temporelle de l'entropie et de la forme de Dirichlet de l'état du système par rapport à certaines mesures de référence qui correspondent à des états proches de l'équilibre. Cette méthode a été généralisée aux systèmes non gradient par Varadhan dans [103] et Quastel dans [95].

La seconde méthode, dite *d'entropie relative* a été introduite par Yau [105]. Elle consiste à étudier l'évolution temporelle de l'entropie par rapport à des mesures produit dont le paramètre est solution de l'équation hydrodynamique. Cette méthode nécessite la régularité des solutions de l'équation

hydrodynamique.

Ces méthodes ont été adaptées aux modèles hors équilibre avec réservoirs pour établir les comportements hydrodynamiques, voir par exemple [32, 54, 55, 71, 13, 17, 75, 7] et les références qui s'y trouvent.

Pour tout entier $k \geq 1$, notons \mathbb{T}_N^k le tore discret k -dimensionnel de taille N . Considérons un processus de Markov $(\eta_t)_{t \geq 0}$ qui décrit l'évolution d'un système de particules (cf. section 1.3) en volume fini ($S = \mathbb{T}_N^d$ ou $S = \{-N+1, \dots, N-1\} \times \mathbb{T}_N^{d-1}$). Soient μ, ν deux mesures de probabilité sur l'espace d'états \mathbb{X} telles que μ soit absolument continue par rapport à ν , de densité f . L'entropie de μ par rapport à ν est définie par

$$H[\mu|\nu] = H[f] = \int_{\mathbb{X}} f(\eta) \log(f(\eta)) d\nu(\eta). \quad (2.0.1)$$

C'est une fonction semi-continue supérieurement, positive, nulle seulement si $f \equiv 1$ et elle coïncide avec la forme variationnelle

$$H[\mu|\nu] = \sup_{U \in C_b(\mathbb{X})} \left[\int U(\eta) d\mu(\eta) - \log \int \exp(U(\eta)) d\nu(\eta) \right], \quad (2.0.2)$$

où $C_b(\mathbb{X})$ est l'ensemble des fonctions continues bornées sur \mathbb{X} .

De la forme (2.0.2) de l'entropie découlent deux inégalités importantes dites *inégalités entropiques* : pour toute fonction continue bornée U et pour tout $\gamma > 0$

$$\int U(\eta) d\mu(\eta) \leq \frac{1}{\gamma} \log \int \exp(\gamma U(\eta)) d\nu(\eta) + \frac{1}{\gamma} H[\mu|\nu]; \quad (2.0.3)$$

pour un ensemble mesurable A ,

$$\mu(A) \leq \frac{\log 2 + H[\mu|\nu]}{\log \left[1 + \frac{1}{\nu(A)} \right]}. \quad (2.0.4)$$

De même, si $(\eta_t)_{t \geq 0}$ et $(\xi_t)_{t \geq 0}$ sont deux processus de Markov sur l'espace d'états \mathbb{X} , de lois respectives \mathbb{P}_N et $\tilde{\mathbb{P}}_N$, telles que \mathbb{P}_N soit absolument continue par rapport à $\tilde{\mathbb{P}}_N$, l'entropie de \mathbb{P}_N par rapport à $\tilde{\mathbb{P}}_N$ est définie par

$$H[\mathbb{P}_N|\tilde{\mathbb{P}}_N] = \int_{\mathbb{X}} \frac{d\mathbb{P}_N}{d\tilde{\mathbb{P}}_N} \log \left(\frac{d\mathbb{P}_N}{d\tilde{\mathbb{P}}_N} \right) d\tilde{\mathbb{P}}_N,$$

où $\frac{d\mathbb{P}_N}{d\tilde{\mathbb{P}}_N}$ est la dérivée de Radon-Nikodym de \mathbb{P}_N par rapport à $\tilde{\mathbb{P}}_N$.

Ce chapitre décrit mes travaux sur les limites hydrodynamiques. Les modèles étudiés sont classés en trois catégories : hors équilibre avec réservoirs, à longue portée, non conservatifs, et enfin en volume infini.

2.1 Modèles hors équilibre avec réservoirs

On se place en dimension $d \geq 1$ et on fixe un entier N qui va tendre vers l'infini dans l'étude de l'hydrodynamique ou des grandes déviations. Pour fixer les idées on se place dans un cylindre $\Omega_N = \{-N+1, \dots, N-1\} \times \mathbb{T}_N^{d-1}$ de \mathbb{Z}^d de taille $2N-1$ et de base \mathbb{T}_N^{d-1} . On note $\Gamma_N = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}_N^{d-1} \mid x_1 = \pm(N-1)\}$ le bord de Ω_N . Le domaine Ω_N désigne l'espace microscopique sur lequel évoluent les particules. Le comportement hydrodynamique du système est décrit sur l'espace macroscopique $\Omega = (-1, 1) \times \mathbb{T}^{d-1}$, où \mathbb{T}^{d-1} représente le tore de dimension $d-1$. On désigne par Γ le bord de Ω . Les éléments de Ω_N seront notés par les lettres x, y, \dots et ceux de Ω par u, v, \dots .

Les modèles stochastiques de gaz sur réseau avec réservoirs peuvent être construits de la manière suivante. On fixe une fonction $b(\cdot)$ définie sur le bord Γ de Ω et un profil de densité $\gamma(\cdot)$ défini sur Ω et dont la trace sur Γ est égale à la fonction b . On considère une des dynamiques décrites dans la sous-section 1.3.1 de générateur \mathcal{L}_0 et on suppose que la probabilité de transition $p(\cdot, \cdot)$ est symétrique et à plus proche voisin. Les équations hydrodynamiques que nous étudions sont alors obtenues sous le changement d'échelle diffusif $(x, t) \mapsto (x/N, tN^2)$.

Les systèmes avec réservoirs sont constitués de la superposition de deux dynamiques, ils admettent pour générateurs des opérateurs linéaires de la forme

$$N^2\mathcal{L} = N^2\mathcal{L}_0 + N^2\mathcal{L}_b. \quad (2.1.1)$$

La dynamique du générateur $N^2\mathcal{L}_0$ décrit les mouvements de particules à l'intérieur du domaine Ω_N , et la seconde dynamique du générateur $N^2\mathcal{L}_b$ modélise les réservoirs au bord de Ω_N , voir la sous-section 1.3.3.

On s'intéresse au comportement limite des mesures empiriques de répartition de particules définies par

$$\pi_t^N(\eta) = N^{-d} \sum_{x \in \Omega_N} \eta_t(x) \delta_{x/N} \in \mathcal{M}_+(\Omega), \quad (2.1.2)$$

où, pour tout u , δ_u est la masse de Dirac au point u et $\mathcal{M}_+(\Omega)$ est l'ensemble des mesures positives sur Ω .

Plusieurs articles sont consacrés aux comportements hydrodynamique et hydrostatique des modèles hors équilibres [62, 32, 54, 55, 71]. Pour certains modèles avec réservoirs, la mesure stationnaire peut être calculée explicitement, c'est le cas des modèles de zero-range. L'étude de l'hydrostatique

se ramène alors au cas des modèles classiques à l'équilibre. Dans ce cadre, le comportement hydrodynamique pour des systèmes avec réservoirs à été prouvé en dimension 1 dans [32] pour le modèle de zero-range.

En général, la mesure stationnaire hors équilibre n'est pas connue explicitement, c'est le cas même de l'exclusion simple. La méthode d'entropie [67] a été adaptée pour ces modèles gradient en dimension 1, par [54] et [55], d'abord partant d'une mesure associée à un profil de densité initiale ρ_0 , puis partant de l'unique mesure stationnaire (*limite hydrostatique*). Ces résultats ont été étendus aux modèles non gradient, en dimension 1 dans [71].

Cette partie regroupe les résultats que nous avons obtenu sur les comportements hydrodynamiques des systèmes hors équilibre. Nous avons étudié les modèles non gradient et les modèles en milieu aléatoire en toute dimension. Nous nous sommes également intéressé à la dérivation des équations qui ne sont pas invariantes par changement d'échelle, de type équations de Navier-Stokes (*limite incompressible*).

- *Systèmes non gradient.* Dans [75], en collaboration avec C. Landim et S. Sellami, nous avons étudié le comportement hydrodynamique pour un système non gradient en toute dimension. Le générateur de la dynamique s'écrit comme 2.1.1, où \mathcal{L}_0 est le générateur de la κ -exclusion symétrique, \mathcal{L}_b est la partie du générateur qui modélise les réservoirs. Les équations hydrodynamiques obtenues sont de la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \nabla \cdot (D(\rho) \nabla \rho), \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot), \\ \rho(t, \cdot) = b(\cdot) \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

où l'opérateur ∇ désigne le gradient, $\rho_0(\cdot)$ est le profil initial de densité et $b(\cdot)$ est la densité imposée au bord (voir section 1.3.3). Le comportement hydrodynamique pour ce modèle a été étudié sur le tore dans [70], puis avec réservoirs en dimension un dans [71], où une formulation variationnelle de la matrice D a été donnée via la *formule de Green-Kubo*. Les coefficients de diffusion $\{D_{i,j}, 1 \leq i, j \leq d\}$ dépendent des propriétés statistiques du modèle, avant d'en donner l'expression variationnelle nous avons besoin de quelques notations. Les mesures invariantes pour la κ -exclusion symétrique sont données par (1.3.5). Soit $\Phi : [0, \kappa] \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction qui permet de les reparamétriser de sorte que

$$\int_{\mathbb{X}} \eta(x) d\nu_{\Phi(\rho)}(\eta) = \rho \quad \text{pour } x \text{ dans } \Omega_N.$$

Pour toute fonction cylindrique $g : \mathbb{X} = \{0, \dots, \kappa\}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$, on note formellement $\Gamma_g(\eta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \tau_z g$ et $\nabla_{0, e_i} g(\eta) = g(\eta^{0, e_i}) - g(\eta)$, où $\{e_1, \dots, e_d\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^d . La matrice de diffusion D est symétrique, elle est déterminée par la formule suivante :

$$a \cdot D(\rho)a = \frac{1}{2\chi(\rho)} \inf_g \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{X}} \left(a_i r_{0, e_i} + \nabla_{0, e_i} \Gamma_g \right)^2 d\nu_{\Phi(\rho)}(\eta) \quad (2.1.4)$$

où pour $a, b \in \mathbb{R}^d$, $(a \cdot b)$ est le produit scalaire dans \mathbb{R}^d et $\chi(\rho)$ désigne la compressibilité définie par

$$\chi(\rho) = \int_{\mathbb{X}} (\eta(0))^2 d\nu_{\Phi(\rho)}(\eta) - \left(\int_{\mathbb{X}} \eta(x) d\nu_{\Phi(\rho)}(\eta) \right)^2.$$

La formule variationnelle rend la manipulation de cette matrice délicate, cependant des investigations concernant la régularité des coefficients de diffusion ont fait l'objet de nombreux travaux [76, 77, 10].

Voir aussi (2.1.13), où la formule de Green-Kubo est donnée pour un modèle non-gradient avec désordre.

- *Limites hydrostatiques.* Dans [58], en collaboration avec J. Farfan et C. Landim, nous avons prouvé la limite hydrostatique en toute dimension et nous en avons déduit la loi de Fick (cf. (2.1.7) ci-dessous). Nous avons considéré le processus d'exclusion avec changement de vitesse, la dynamique microscopique à l'intérieur du domaine est alors donnée par (1.3.10). La dynamique au bord Γ_N du domaine est choisie de telle sorte que le générateur \mathcal{L}_b soit réversible par rapport à la mesure produit de Bernoulli $\nu_N^{\gamma(\cdot)}$ de paramètre γ , où $\gamma(\cdot)$ est une fonction définie sur un voisinage de Γ dont la restriction à Γ est $b(\cdot)$.

En adaptant la stratégie de [67], nous avons commencé par montrer que si initialement les particules sont distribuées suivant un profil de densité $\rho_0 : \Omega \rightarrow [0, 1]$, les mesures empiriques de répartition de particules convergent faiblement vers la solution d'une équation non linéaire avec condition de Dirichlet et condition initiale ρ_0 de type

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \varphi(\rho), \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot), \\ \rho(t, \cdot) = b(\cdot) \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.1.5)$$

où Δ est l'opérateur laplacien.

Le comportement hydrostatique décrit l'asymptotique sous les mesures stationnaires μ_{ss}^N . Les mesures empiriques convergent vers la solution de l'équation stationnaire $\bar{\rho}$, associée à l'équation hydrodynamique (2.1.5) :

$$\begin{cases} \Delta\varphi(\bar{\rho}) = 0, \\ \bar{\rho}(\cdot) = b(\cdot) \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Nous obtenons la limite hydrostatique en étudiant trois copies du processus : la première part d'un profil de densité constante égal à 0, la seconde part de l'état stationnaire du système, et la troisième part d'un profil de densité constante égale à 1. La première étape consiste à montrer que lorsque $N \uparrow \infty$, les mesures empiriques de la seconde copie convergent vers la solution faible de l'équation hydrodynamique, mais sans condition initiale connue. D'autre part, on montre que pour tout profil initial $0 \leq \gamma \leq 1$, la solution ρ_t de (2.1.5) est bornée inférieurement (resp. supérieurement) par les solutions ρ_t^0 (resp. ρ_t^1), de (2.1.5) avec condition initiale égale à 0 (resp. 1). On prouve ensuite que ρ_t^0 et ρ_t^1 convergent lorsque $t \uparrow \infty$, vers le profil stationnaire $\bar{\rho}$. Le comportement hydrostatique est obtenu finalement par la stationnarité des mesures μ_{ss}^N . La *loi de Fick* est ensuite obtenue par un corollaire immédiat du comportement hydrostatique du système : pour tout $-1 < u < 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} E^{\mu_{ss}^N} \left[\frac{2N}{N^{d-1}} \sum_{y \in \mathbb{T}_N^{d-1}} W_{([uN], y), ([uN]+1, y)} \right] \\ = \int_{\Gamma_-} \varphi(b(v)) S(dv) - \int_{\Gamma_+} \varphi(b(v)) S(dv), \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

où le courant $W_{x,y}$ entre deux sites voisins x, y est défini par (1.3.8) et dS est la mesure superficielle. Γ_- et Γ_+ désignent respectivement les bords gauche et droit de Ω ,

$$\Gamma_{\pm} = \{(u_1, \dots, u_d) \in \Omega \mid u_1 = \pm 1\}.$$

- *Modèles en milieu aléatoire.* Avec E. Orlandi, dans [90], nous avons considéré le processus d'exclusion avec champ extérieur aléatoire décrit dans la section 1.3.1, de générateur défini par (1.3.13) avec des réservoirs. Le but est d'étendre les résultats de notre article [58] aux modèles non gradient et en milieu aléatoire.

Le processus évolue dans Ω_N avec des réservoirs sur le bord Γ_N . Les réservoirs sont modélisés par un processus de générateur

$$(\mathcal{L}_b f)(\eta) = \sum_{x \in \Gamma_N} C^b(x/N, \eta) [f(\eta^x) - f(\eta)],$$

où η^x est la configuration obtenue à partir de η en échangeant la valeur de $\eta(x)$

$$(\eta^x)(z) := \begin{cases} 1 - \eta(x) & \text{si } z = x \\ \eta(z) & \text{si } z \neq x. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Les taux C^b sont choisis de telle sorte que \mathcal{L}_b soit réversible par rapport à la mesure de Bernoulli $\nu_{\gamma(\cdot)}^{\alpha, N}$:

$$C^b(x/N, \eta) = \eta(x) \exp \left\{ - \frac{\alpha(x) + \lambda_0(b(\frac{x}{N}))}{2} \right\} \\ + (1 - \eta(x)) \exp \left\{ \frac{\alpha(x) + \lambda_0(b(\frac{x}{N}))}{2} \right\}.$$

Le comportement hydrodynamique est donné par l'équation (2.1.3), où la matrice de diffusion $D(\cdot)$ est donnée par la formule variationnelle (2.1.13). De même que dans [58], la démonstration du comportement hydrostatique est basée sur les comportement hydrodynamique du système partant d'un profil quelconque, et sur le fait que l'équation stationnaire de l'équation hydrodynamique est un attracteur global de l'équation hydrodynamique. De plus, nous déduisons la loi de Fick du comportement hydrostatique.

Le comportement hydrodynamique pour les modèles d'exclusion avec champ extérieur aléatoire a été démontré sur le tore \mathbb{T}^d , par Faggionato & Martinelli dans [56], à savoir : si, initialement, les particules sont distribuées suivant une densité $\rho_0 : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$, alors le système au temps t est décrit par une densité de particules $\rho_t : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ qui est solution faible de l'équation aux dérivées partielles de type (2.1.3) :

$$\partial_t \rho = \nabla \cdot (D(\rho) \nabla \rho), \quad (2.1.9)$$

c'est-à-dire, l'équation de continuité pour ρ associée au courant de densité macroscopique donné par la loi de Fick

$$j = -D(\rho) \nabla \rho.$$

Désignons par $\lambda_0(\rho)$ le potentiel chimique qui dépend du désordre α , exprimé en fonction de la pression du système $p_0(\cdot)$,

$$p_0(\lambda) = \mathbf{E} \left[\log \left(1 + e^{(\lambda + \alpha(0))} \right) \right], \quad (2.1.10)$$

par la relation

$$\rho = \frac{dp_0}{d\lambda}(\lambda_0(\rho)) = \mathbf{E} \left[\frac{e^{(\lambda_0(\rho) + \alpha(0))}}{1 + e^{(\lambda_0(\rho) + \alpha(0))}} \right],$$

où \mathbf{E} désigne l'espérance par rapport à la probabilité \mathbf{P} de l'environnement définie dans la section 1.3.1. Le potentiel chimique $\lambda_0(\cdot)$ permet de paramétrer les particules par la densité ρ , c'est l'unique potentiel chimique qui satisfait la relation

$$\mathbf{E} \left[\mathbb{E}^{\mu^{\alpha, \lambda_0(\rho)}} [\eta(0)] \right] = \rho$$

pour tout $\rho \in [0, 1]$. La mesure $\mu^{\alpha, \lambda_0(\rho)}$ est définie par (1.3.17).

Pour obtenir l'équation (2.1.9) à partir d'une dynamique microscopique, il est plus convenable d'écrire la loi de Fick sous la forme

$$j = -\sigma(\rho) \nabla \lambda_0(\rho),$$

où σ est la *conductivité*, ou la *mobilité* du système, liée à la matrice de diffusion par la relation dite d'Einstein, voir [101]

$$D(\rho) = \sigma(\rho) / \chi(\rho),$$

où $\chi(\rho)$ est la compressibilité statique, qui s'exprime en fonction de la pression par la formule

$$\chi(\rho) = [\lambda'_0(\rho)]^{-1} = \mathbf{E} \left[\frac{e^{(\lambda_0(\rho) + \alpha(0))}}{(1 + e^{(\lambda_0(\rho) + \alpha(0))})^2} \right]. \quad (2.1.11)$$

Remarquons que, pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\chi(\rho)$ n'est rien d'autre que la moyenne (sur l'environnement) de la variance de $\eta(0)$ par rapport à la mesure $\mu^{\alpha, \lambda_0(\rho)}$:

$$\chi(\rho) = \mathbf{E} \left[\int \eta(0)^2 d\mu^{\alpha, \lambda_0(\rho)}(\eta) - \left(\int \eta(0) d\mu^{\alpha, \lambda_0(\rho)}(\eta) \right)^2 \right]. \quad (2.1.12)$$

Comme dans (2.1.4), la formule de Green-Kubo permet d'exprimer la matrice symétrique de diffusion D sous forme variationnelle (voir [56]) : pour tout vecteur a de \mathbb{R}^d et $\rho \in [0, 1]$,

$$(a \cdot D(\rho) a) = \frac{1}{2\chi(\rho)} \inf_{g \in \mathcal{S}} \sum_{i=1}^d \mathbf{E} \left[\mathbb{E}^{\mu^{\alpha, \lambda_0(\rho)}} \left(C^\alpha(0, e_i; \eta) \left\{ a_i \nabla_{0, e_i} \eta(0) + (\nabla_{0, e_i} \Gamma_g)(\eta) \right\}^2 \right) \right]. \quad (2.1.13)$$

- *Limite incompressible.* La dérivation et l'interprétation des équations aux dérivées partielles qui ne sont pas invariantes par changement d'échelle, comme les équations de Navier-Stokes, a suscité un grand intérêt en physique

mathématique. Trois interprétations ont été développées pour obtenir ces équations.

La première approche concerne l'étude des limites incompressibles [51, 52, 53, 6, 7]. Dans ce cadre, avec O. Benois, R. Esposito et R. Marra [7], nous avons étudié un modèle de gaz sur réseau dans un domaine borné avec conditions aux bords. Il s'agissait d'étendre les résultats de R. Esposito, R. Marra & H.T. Yau [52] aux modèles hors équilibre. Le modèle considéré est l'exclusion simple asymétrique décrit dans la section 1.3.1 et généré par (1.3.6). On se place en dimension $d \geq 3$ et on prend une probabilité de transition $p(\cdot, \cdot)$ vérifiant (1.3.1), on la suppose asymétrique et à plus proche voisin, avec $p(e_i) - p(-e_i) = \delta_i > 0$, où e_1, \dots, e_d sont les éléments de la base canonique de \mathbb{R}^d .

Le comportement hydrodynamique sous l'échelle eulérienne est décrit par l'équation hyperbolique [97, 73, 3, 4, 5, 98],

$$\partial_t \rho + \delta \cdot \nabla F(\rho) = 0, \quad (2.1.14)$$

où $F(\rho) = \rho(1 - \rho)$ et $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$: si initialement les particules sont distribuées suivant une mesure produit de Bernoulli, de paramètre faiblement variable $\rho_0(x/N)$, et si on regarde le système sous l'échelle d'Euler $(x, t) \mapsto (x/N, tN)$, alors à tout instant ultérieur t , la suite des mesures empiriques (2.1.2) converge vers la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la densité $\rho(t, u)$, est la solution entropique de l'équation (2.1.14) avec condition initiale $\rho_0(\cdot)$.

Les mesures invariantes pour l'exclusion simple asymétrique sur le tore sont les mesures produit de Bernoulli de paramètre constant. L'idée de la limite incompressible [52] est de répartir initialement les particules suivant une mesure de Bernoulli dont le paramètre est une petite perturbation d'une constante $a \in (0, 1)$, et d'étudier le processus sous l'échelle diffusive.

Heuristiquement, on peut interpréter cette idée de la manière suivante [52, 8, 79] : dans le cadre des systèmes de particules asymétriques, les équations de Navier–Stokes s'écrivent sous la forme

$$\partial_t \rho^N + \delta \cdot \nabla F(\rho^N) = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \partial_{u_i} \left(D_{i,j}(\rho^N) \partial_{u_j} \rho^N \right), \quad (2.1.15)$$

où D est la matrice de diffusion. Considérons une petite perturbation du profil constant $a \in (0, 1)$: $\rho_0^N(u) = a + \frac{\varphi(u)}{N}$. Supposons qu'à tout instant $t \geq 0$, le profil garde la même forme $\rho^N(t, u) = a + \frac{\varphi(t, u)}{N}$. Le courant

macroscopique de l'équation (2.1.14) peut s'écrire

$$\delta F(\rho^N) = \delta F(a) - N^{-1}v\varphi - N^{-2}\delta\varphi^2, \quad v = (1 - 2a)\delta. \quad (2.1.16)$$

Par changement d'échelle temporelle $t \mapsto tN^{-1}$, nous obtenons à partir de (2.1.16) et (2.1.15), l'équation suivante en la variable $\varphi_N = \varphi(tN, u)$:

$$\partial_t \varphi_N + Nv \cdot \nabla \varphi_N - \delta \cdot \nabla (\varphi_N)^2 = \sum_{i,j} D_{i,j}(a) \partial_{u_i, u_j}^2 \varphi_N + O(N^{-1}).$$

La transformation

$$m_N(t, u) = \varphi_N(t, u - Nvt) \quad (2.1.17)$$

permet d'annuler le terme divergent $Nv \cdot \nabla \varphi_N$ de la dernière équation aux dérivées partielles ; on obtient à la limite une équation pour la variable $m = \lim_{N \rightarrow \infty} m_N$

$$\partial_t m - \delta \cdot \nabla m^2 = \sum_{i,j} D_{i,j}(a) \partial_{u_i, u_j}^2 m.$$

Notons que si $\alpha = 1/2$, il n'y a pas besoin de recourir à la transformation (2.1.17), puisque dans ce cas $v = 0$.

Rappelons quelques notations de la section 1.3.3. Dans [7], nous avons considéré un système avec réservoirs hors équilibre en dimension $d \geq 3$, de générateur donné par (1.3.29). La dynamique à l'intérieur du domaine Ω_N est l'exclusion simple asymétrique étudiée dans [52] et décrite ci-dessus. Au bord Γ_N du domaine, la dynamique \mathcal{L}_b consiste en un processus de naissances et de morts : pour chaque site x du bord gauche (resp. droit) du cylindre Ω_N , lorsque le site est vide (resp. occupé), on crée (resp. on tue) une particule indépendamment en chaque site au taux $\delta_1(1/2 + N^{-1}b(x/N))$ (resp. $\delta_1(1/2 - N^{-1}b(x/N))$). La fonction régulière $b(\cdot)$ est fixée et définie sur un voisinage du bord Γ . La mesure initiale considérée est la mesure de Bernoulli dont le paramètre est une perturbation d'ordre $1/N$, de la constante $1/2$: $\rho_0(x/N) = 1/2 + N^{-1}m_0(x/N)$.

Nous avons prouvé la loi des grands nombres, en établissant la convergence faible pour les champs de densités accélérés

$$\frac{1}{N^{d-1}} \sum_{x \in \Omega_N} \left(\eta_{N^2 t}(x) - \frac{1}{2} \right) \delta_{x/N}$$

vers l'équation

$$\begin{cases} \partial_t m - \delta \cdot \nabla_u m^2 = \sum_{i,j=1}^d D_{i,j} \partial_{u_i, u_j}^2 m \\ m(0, \cdot) = m_0(\cdot) \\ m(t, \cdot) \Big|_{\Gamma} = b(\cdot) \quad \text{pour } t \geq 0, \end{cases} \quad (2.1.18)$$

où D est une matrice de diffusion dont l'expression est donnée par la formule de Green-Kubo pour ce modèle. La démonstration est basée sur l'utilisation de l'entropie relative, par rapport à la mesure ν_N^t de Bernoulli de profil $1/2 + \frac{1}{N}m(t, u)$, où m est la solution de l'équation (2.1.18) [102]. Plus précisément, désignons par $\mu_N(t)$ l'évolution de la mesure ν_N^0 sous le semi-groupe du processus, accéléré dans le temps par N^2 . La principale étape de la démonstration consiste à montrer qu'à tout instant $t \geq 0$, l'entropie $H[\mu_N(t)|\nu_N^t]$ de la mesure $\mu(t)$ par rapport à ν_N^t , satisfait

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2-d} H[\mu_N(t)|\nu_N^t] = 0. \quad (2.1.19)$$

Le résultat découle ensuite de l'inégalité entropique (2.0.4).

La seconde approche pour atteindre les équations de Navier-Stokes est proposée dans [43, 78]. Elle correspond aux corrections à la limite hydrodynamique. Enfin, la dernière interprétation [78, 8, 79] repose sur l'analyse du comportement de l'équation à temps grand.

2.2 Modèles à longue portée

Plusieurs articles traitent de l'évolution macroscopique de systèmes interagissant via un potentiel de Kac, voir par exemple [64, 65, 66, 85] pour les dynamiques conservatives et [31, 33, 85, 9] pour les dynamiques non-conservatives. Nous renvoyons au livre de E. Presutti [94] pour une étude synthétique et bibliographique.

Dans ce contexte, nous avons étudié les comportements hydrodynamiques et hydrostatiques de deux types de modèles perturbés par un potentiel de Kac : l'exclusion avec champ extérieur aléatoire et les processus de Blume-Capel.

- *Exclusion avec désordre.* Avec E. Orlandi et E. Saada [88], nous avons travaillé sur le modèle d'exclusion avec désordre perturbée par un potentiel d'interaction de Kac (cf. (1.3.18)). Le processus que nous avons considéré au niveau microscopique est construit pour $\beta \geq 0$, à partir de l'hamiltonien $H_N^{\beta, \alpha}$ défini par (1.3.19), son générateur est donné par (1.3.22).

Les mesures invariantes pour la dynamique avec potentiel de Kac sont les mesures de Gibbs définies dans (1.3.20), qui ne sont pas produit. Puisque nous regardons le modèle comme une perturbation du processus pour $\beta = 0$, nos mesures de référence sont les mesures produit (1.3.17), qui sont invariantes pour $\beta = 0$.

Pour presque toute réalisation de l'environnement $\alpha \in E_a$, nous démontrons que si les particules sont distribuées suivant un profil de densité initial ρ_0 , alors lorsque $N \uparrow \infty$, les mesures empiriques convergent vers l'unique solution faible de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \sum_{k,m=1}^d \partial_k \left\{ D_{k,m}(\rho) \left\{ \partial_m \rho - \beta \chi(\rho) (\partial_m J * \rho) \right\} \right\}, \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où la *compressibilité* $\chi(\cdot)$ du système est définie dans (2.1.11) et (2.1.12). La matrice de diffusion est donnée par la formule (2.1.13). L'équation (2.2.1) peut se mettre sous forme d'une équation différentielle intégrale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\sigma(\rho) \nabla \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \rho} \right),$$

où la fonctionnelle de l'énergie $\mathcal{G}(\rho)$ est

$$\mathcal{G}(\rho) = \int g_0(\rho(r)) dr - \frac{\beta}{2} \int \int J(r-r') \rho(r) \rho(r') dr dr',$$

et $\sigma(\rho)$ est la conductivité ou la mobilité, associée au système pour $\beta = 0$. La fonction de l'énergie libre g_0 est donnée par

$$g_0(\rho) = \rho \lambda_0(\rho) - p_0(\lambda_0(\rho))$$

pour la pression p_0 définie dans (2.1.10).

Les propriétés de la fonctionnelle de l'énergie ont été utilisées dans plusieurs travaux pour étudier la ségrégation de phases. Dans ce contexte, les deux dynamiques de Glauber et de Kawasaki pour le modèle d'Ising avec potentiel de Kac ont été largement étudiées. Citons ici les articles [64, 65, 66] ; dans les deux premiers, les auteurs ont étudié la ségrégation de phase en utilisant les équations hydrodynamiques pour le modèle d'exclusion sans environnement aléatoire (α constant). Le troisième article étudie l'hydrodynamique pour l'exclusion avec un potentiel à portée finie, perturbée par un le potentiel de Kac.

- *Modèles de Blume-Capel.* Dans l'article [85], en collaboration avec R. Marra, nous avons étudié les dynamiques de Blume-Capel avec potentiel d'interaction de Kac. Nous avons considéré ces modèles dans le cas conservatif avec une dynamique d'échange de particules de type Kawasaki, et une dynamique de flips de spins non conservative (Glauber), cf. le chapitre 1.3.2.

Nous avons établi les limites hydrodynamiques en volume infini pour les deux types de modèles. Comme ces dynamiques possèdent deux quantités conservées, la magnétisation et la concentration, l'évolution macroscopique est décrite pour chacune de ces dynamiques, par un couple d'équations aux dérivées partielles.

Pour la dynamique de type Kawasaki, nous avons utilisé la méthode d'entropie spécifique introduite dans [61]. Puisque la dynamique pour $\beta > 0$ est une perturbation du processus à température infinie $\beta = 0$, il est naturel de considérer comme mesures de référence les mesures invariantes pour cette dynamique. Nous avons démontré que si initialement, au niveau microscopique la magnétisation et la concentration sont distribuées suivant un couple de valeurs convenable (m_0, ϕ_0) , alors à tout instant $t \geq 0$, le couple (m_t, ϕ_t) formé par la magnétisation et la concentration est donné par l'unique solution faible du système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t m = \nabla \cdot \left[\nabla m - 2\beta(\phi - (m)^2)(\nabla J * m) \right], \\ \partial_t \phi = \nabla \cdot \left[\nabla \phi - 2\beta m(1 - \phi)(\nabla J * m) \right], \\ m(0, \cdot) = m_0, \quad \phi(0, \cdot) = \phi_0, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

où $*$ désigne le produit de convolution.

L'équation (2.2.2) peut s'écrire en fonction du flux gradient via la fonctionnelle de l'énergie libre \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}(\underline{u}) = \int dr f^0(\underline{u}(r)) + \frac{1}{2} \int dr \int dr' J(r - r') [m(r) - m(r')]^2$$

où $\underline{u} := (m, \phi)$ et $f^0(\underline{u})$ est donnée par

$$f^0(\underline{u}) := -m^2 + \phi + \beta^{-1} \left[\frac{1}{2}(m + \phi) \log(m + \phi) + \frac{1}{2}(\phi - m) \log(\phi - m) + (1 - \phi) \log(1 - \phi) - \phi \log 2 \right].$$

Avec ces notations les équations (2.2.2) peuvent se mettre sous la forme

$$\partial_t u_\ell = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1,2} \partial_i [M_{\ell,k} \partial_i \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta u_k}], \quad \ell = 1, 2$$

ou encore sous forme vectorielle

$$\partial_t \underline{u} = \nabla \cdot \left(M \nabla \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \underline{u}} \right),$$

où nous avons désigné par $\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta u_\ell}$ la dérivée de \mathcal{G} par rapport à la variable u_ℓ et par M la mobilité du système donnée par la matrice 2×2

$$M = \beta(1 - \phi) \begin{pmatrix} \phi + \frac{\phi^2 - m^2}{1 - \phi} & m \\ m & \phi \end{pmatrix}.$$

L'étude de la séparation de phases peut se faire par une analyse de la fonctionnelle de l'énergie \mathcal{G} .

Le comportement hydrodynamique pour le modèle de Blume-Capel de type Glauber est décrit par le système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} m^{(G)} \\ \phi^{(G)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1^\beta(m^{(G)}, \phi^{(G)}) \\ \mathcal{G}_2^\beta(m^{(G)}, \phi^{(G)}) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} m^{(G)}(0, \cdot) \\ \phi^{(G)}(0, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

où $\mathcal{G}_1^\beta, \mathcal{G}_2^\beta$ sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1^\beta(m, \phi) &= \frac{1}{4} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha + h') + \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha - h') \right\} \\ &+ \frac{1}{4} \frac{m}{2} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha + h') - \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha - h') \right\} - \frac{3}{4} m \\ &+ \frac{\phi}{4} \left\{ 2 \tanh \beta \alpha - \frac{1}{2} \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha + h') - \frac{1}{2} \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha - h') \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2^\beta(m, \phi) &= \frac{1}{4} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha + h') - \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha - h') \right\} \\ &+ \frac{1}{4} \frac{m}{2} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha - h') + \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha + h') \right\} \\ &- \frac{1}{4} \frac{\phi}{2} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha + h') - \tanh \frac{\beta}{2}(\alpha - h') \right\} + \frac{1}{4} (2 - 3\phi), \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = 2m * J + \lambda_1, \quad h' = \lambda_2 - \int_{\mathbb{R}^d} J(x) dx$$

et les paramètres λ_1 et λ_2 sont définis dans la formule (1.3.26).

2.3 Modèles non conservatifs

Je me suis intéressé à deux types de modèles non conservatifs, des processus de naissances et morts et des modèles de spin-flip. L'étude du comportement hydrodynamique des processus de naissances et de morts constitue le sujet de ma thèse de doctorat. Les dynamiques microscopiques considérées sont des processus de sauts, de naissances et de morts : sur le tore discrétisé \mathbb{T}_N^d , des particules sautent indépendamment les unes des autres, elles sont créées et détruites selon des taux non linéaires, voir la section 1.3.3. J'ai utilisé des méthodes développées pour les systèmes conservatifs. Les équations obtenues par passage à la limite sont des équations de type réaction-diffusion [86, 87]

$$\begin{cases} \partial_t \rho &= \Delta \rho + F(\rho) \\ \rho(0, \cdot) &= \rho_0(\cdot), \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où $F(\cdot)$ est une fonction non linéaire.

Dans le premier travail [86], j'ai utilisé la méthode d'entropie de Guo, Papanicolaou & Varadhan [67]. La mesure invariante n'étant pas connue explicitement, j'ai considéré comme mesures de références celles qui sont invariantes pour la dynamique de sauts, c'est-à-dire les mesures produit de Poisson $(\nu_\rho)_{\rho \geq 0}$ définies dans (1.3.4) avec $g(k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Bien que ces mesures ne soient pas invariantes pour la dynamique, j'ai contrôlé, sous des conditions sur les taux des naissance et de mort, la croissance de l'entropie (cf. (2.0.1)) du processus par rapport à ces mesures. Ceci m'a permis d'étendre les méthodes de [67] au processus étudié.

Dans le second article [87], j'ai adapté la méthode d'entropie relative de Yau [105], qui consiste à ramener (grâce à l'inégalité entropique (2.0.4)) l'étude de la limite hydrodynamique à celle de l'entropie relative : j'ai prouvé que si l'entropie $H[\mu(0)|\nu_{\rho(0,\cdot)}]$ de la mesure initiale $\mu(0)$ par rapport à $\nu_{\rho(0,\cdot)}$ est de l'ordre $o(N)$, alors à tout instant $t \geq 0$ l'entropie $H[\mu(t)|\nu_{\rho(t,\cdot)}]$ de la mesure $\mu(t)$ par rapport aux profils $\rho(t, \cdot)$ qui sont solutions régulières de l'équation (2.3.1) reste de même ordre $o(N)$, où $\mu(t) = \mu S(t)$ et $\{S(t), t \geq 0\}$ est le semi-groupe associé au processus.

Les travaux autour des dynamiques de spin-flip auxquels je me suis intéressé portent sur deux types de modèles : les modèles de Glauber [9] décrits dans le paragraphe 3.2.2 sur les grandes déviations, et le modèle de Blume-Capel à longue portée de générateur (1.3.28), dont le comportement hydrodynamique est décrit par le système d'équations couplées (2.2.3), cf. [85].

2.4 L'hydrodynamique en volume infini

En collaboration avec C. Landim, nous avons étudié le comportement hydrodynamique des processus de zero-range asymétriques de moyennes nulles en volume infini [74]. La méthode de Guo, Papanicolaou & Varadhan repose sur le contrôle de l'entropie, par rapport aux mesures invariantes.

En volume fini, on démontre que si initialement cette entropie est de l'ordre de la taille du volume, alors à tout instant $t > 0$, l'entropie reste encore de même ordre. En volume infini, on définit l'entropie spécifique [61, 106, 74] comme combinaison adéquate des entropies des mesures invariantes restreintes aux boîtes finies.

Soit $g(\cdot)$ une fonction de saut et p une probabilité de transition vérifiant (1.3.1) qu'on suppose asymétrique de moyenne nulle, c'est-à-dire $\sum_x x p(x) = 0$. Considérons le processus de zero-range $(\eta_t)_{t \geq 0}$ qui évolue sur $S = \mathbb{Z}^d$ et accéléré par N^2 , où N est le paramètre de l'échelle spatiale (cf. section 1.3). Le générateur de la dynamique est donné par $N^2 \mathcal{L}$, où \mathcal{L} est défini par (1.3.2).

Pour une densité fixée $\rho > 0$, soit ν_ρ la mesure produit invariante pour le processus de zero-range défini par (1.3.4). Pour toute mesure μ sur l'espace d'états $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, notons μ_n la marginale de μ sur $\mathbb{X}_n = \mathbb{N}^{\{-n, \dots, n\}^d}$:

$$\mu_n(\xi) = \mu\{\eta; \eta(x) = \xi(x) \text{ pour } |x| \leq n\}, \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{X}_n.$$

où pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$, $|x| = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$. Si $\mu = \nu_\rho$, on note $\mu_n = \nu_{\rho, n}$.

L'entropie spécifique de la mesure μ par rapport à la mesure ν_ρ est définie par

$$\mathcal{H}(\mu) := N^{-1} \sum_{n \geq 1} H[\mu_n | \nu_{\rho, n}] e^{-(n/N)},$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H[\mu_n | \nu_{\rho, n}]$ est l'entropie de la mesure μ_n par rapport à la mesure $\nu_{\rho, n}$ définie par les formules (2.0.1) et (2.0.2).

On démontre sous certaines conditions sur g , que si initialement cette entropie spécifique est d'ordre N , alors à tout instant $t \geq 0$ l'entropie spécifique reste du même ordre. Une telle borne sur l'entropie permet d'étendre au volume infini la démonstration de Guo, Papanicolaou & Varadhan [67] sur le comportement hydrodynamique des systèmes de particules en interaction.

Signalons que pour les processus de Blume-Capel [85], nous avons également étudié l'entropie spécifique et le comportement hydrodynamique en volume infini (voir la section 2.2).

Chapitre 3

Les grandes déviations

Une fois un résultat sur un comportement limite établi, se posent naturellement les questions de la vitesse de convergence vers la limite, et d'un principe de grandes déviations. Ainsi, la limite hydrodynamique d'un système de particules est une loi des grands nombres pour les mesures empiriques, et la probabilité d'observer une déviation de l'état le plus probable décroît vers 0 ; un principe de grandes déviations montre que cette décroissance est exponentielle.

Les premiers résultats sur de grandes déviations autour de la limite hydrodynamique de systèmes de particules sont ceux de Donsker & Varadhan [48], puis ceux de Kipnis, Olla & Varadhan [72], pour des modèles à l'équilibre. S'ensuivra un grand nombre d'articles sur le sujet (voir les recueils [69, 101] synthétiques et bibliographiques). Leurs méthodes ont été adaptées dans [13] pour établir un principe de grandes déviations dynamique pour l'exclusion simple symétrique en dimension 1 avec réservoirs.

Dans [96], Quastel, Rezakhanlou & Varadhan ont développé des techniques de preuves des grandes déviations pour des modèles où la fonctionnelle n'est pas convexe.

Mes travaux de recherche portent sur les grandes déviations dynamiques pour la densité empirique de systèmes avec réservoirs et de modèles à longue portée.

3.1 Modèles avec réservoirs

Cette partie décrit les travaux [20] sur l'exclusion simple faiblement asymétrique et [58] sur l'exclusion avec changement de vitesse.

3.1.1 Exclusion simple faiblement asymétrique

Avec L. Bertini et C. Landim [20], nous avons démontré un principe de grandes déviations dynamique pour le processus d'exclusion simple faiblement asymétrique sur un segment $\Omega_N = \{-N, \dots, N\}$ de dimension 1 avec des réservoirs à ses extrémités. Le générateur du processus est de type (1.3.29). La dynamique à l'intérieur de Ω_N a été décrite dans la sous-section 1.3.3, son générateur est donné par (1.3.11). L'asymétrie à l'intérieur du domaine est d'ordre E/N pour un réel E fixé. L'action des réservoirs au bord de Ω_N est défini par le générateur

$$(\mathcal{L}_b f)(\eta) = (L_{-,N} f)(\eta) + (L_{+,N} f)(\eta)$$

où

$$\begin{aligned} (L_{-,N} f)(\eta) &= \frac{N^2}{2} c_-(\eta(-N+1)) [f(\sigma^{-N+1} \eta^{-N+1}) - f(\eta)] \\ (L_{+,N} f)(\eta) &= \frac{N^2}{2} c_+(\eta(N-1)) [f(\eta^{N-1}) - f(\eta)], \end{aligned}$$

pour $x \in \Omega_N$, la configuration η^x est définie par (2.1.8), et $c_{\pm} : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ sont données par

$$c_{\pm}(\zeta) := \rho_{\pm} e^{\mp E/(2N)} (1 - \zeta) + (1 - \rho_{\pm}) e^{\pm E/(2N)} \zeta.$$

Le comportement hydrodynamique a été établi pour ces modèles sans réservoirs dans [36, 63, 72]. Avec réservoirs, le comportement hydrodynamique est décrit par l'équation de Burgers visqueuse avec conditions de Dirichlet aux extrémités du segment $[-1, 1]$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \frac{E}{2} \nabla \chi(\rho) - \frac{1}{2} \Delta \rho = 0 \\ \rho_t(\pm 1) = \rho_{\pm} \\ \rho_0(u) = \gamma(u), \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où $\chi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la mobilité du système, définie par $\chi(a) = a(1-a)$, et $\rho_{\pm} \in (0, 1)$ sont les densités fixées aux extrémités ± 1 .

À cause du terme de viscosité non linéaire dans l'équation hydrodynamique (3.1.1), la fonctionnelle d'action \mathcal{I} des grandes déviations n'est pas convexe; cependant nous adaptons les grands axes des méthodes générales de [48, 72]. Pour cela, nous modifions les preuves des bornes supérieure et inférieure des grandes déviations en reprenant quelques arguments de [96].

La stratégie de base de la preuve de la borne inférieure est en deux étapes: d'abord, par les mêmes arguments que dans [72, 69], pour des trajectoires régulières: en effet, en se plaçant dans un espace de Hilbert convenable et en se basant sur le théorème de représentation de Riesz, nous obtenons une représentation explicite de la fonctionnelle d'action. Plus précisément, si une trajectoire π satisfait $\mathcal{I}(\pi) < \infty$, alors il existe une fonction $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \partial_t \pi_t - \frac{1}{2} \Delta \pi_t + \frac{E}{2} \nabla \chi(\pi_t) = -\nabla \{ \chi(\pi_t) \nabla H_t \}, \\ H_t(\pm 1) = 0. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

De plus, la fonctionnelle d'action pour la trajectoire π en fonction de H s'écrit:

$$\mathcal{I}(\pi) = \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_{[-1,1]} \chi(\pi_t) [\nabla H_t]^2 dx.$$

Notons que le membre de gauche de l'équation (3.1.2) est exactement l'équation hydrodynamique (3.1.1). La première étape s'obtient alors comme dans [72, 69] en étudiant le comportement hydrodynamique d'un processus auxiliaire, construit comme une perturbation faible du processus original par un champ extérieur, impliquant une fonction régulière H .

La seconde étape consiste à généraliser la borne inférieure à toutes les trajectoires par l'argument de densité suivant: étant donné une trajectoire π de fonctionnelle d'action finie, i.e. $\mathcal{I}(\pi) < \infty$, on construit une suite convenable de trajectoires régulières $\{\pi_n\}$ telles que $\pi_n \rightarrow \pi$ (dans l'espace topologique des trajectoires) et $\mathcal{I}(\pi_n) \rightarrow \mathcal{I}(\pi)$. C'est à ce stade de la preuve que la convexité de la fonctionnelle joue un rôle important dans [72, 13]. Pour remédier à ce problème de convexité, nous modifions la définition de la fonctionnelle \mathcal{I} en lui imposant d'être infinie pour les trajectoires qui ne satisfont pas une évaluation de l'énergie ("energy estimate") appropriée. Pour montrer la densité pour la fonctionnelle modifiée, nous adaptatons des arguments dans [95, 96] au cas des réservoirs. Le fait que la mesure invariante pour le système n'est ni produit, ni connue explicitement, et le manque d'invariance par translation des mesures de référence exigent des outils supplémentaires.

D'autre part, la modification dans la définition de la fonctionnelle \mathcal{I} rend la preuve de la borne supérieure plus difficile que dans [72, 13]: en effet

nous avons besoin de montrer que l'évaluation de l'énergie a lieu avec une probabilité sur-exponentiellement proche de 1.

Signalons enfin qu'en se basant sur nos résultats, Bertini, Gabrielli & Landim ont étudié l'énergie libre hors équilibre de l'exclusion simple faiblement asymétrique [19].

3.1.2 Exclusion avec changement de vitesse

En collaboration avec J. Farfan et C. Landim [58], nous avons donné une preuve des grandes déviations qui s'applique à une classe de modèles avec réservoir plus larges en toute dimension. Pour illustrer la méthode, nous avons considéré le processus d'exclusion avec changement de vitesse.

L'obtention des comportements hydrodynamique et hydrostatique dans cet article à été résumée dans le chapitre 2. La dynamique microscopique à l'intérieur du domaine est donnée par (1.3.10). La dynamique au bord Γ_N du domaine est choisie de telle sorte que le générateur \mathcal{L}_b soit réversible par rapport à la mesure produit de Bernoulli $\nu_N^{\gamma(\cdot)}$ de paramètre γ , où $\gamma(\cdot)$ est une fonction définie sur un voisinage de Γ dont la restriction à Γ soit $b(\cdot)$, la densité que nous fixons au bord du domaine. L'équation hydrodynamique, donnée par (2.1.5) est non-linéaire du second degré,

La contribution de cet article aux grandes déviations dynamiques est une importante simplification de la preuve de la borne inférieure. La fonctionnelle d'action des grandes déviations dynamiques n'est pas convexe ; comme dans l'article [20], nous avons suivi les grandes étapes du cas non convexe [72, 13] en adaptant les techniques de [95, 96, 20, 89]. La principale différence par rapport aux articles précédents réside dans la preuve de l'extension de la borne inférieure et la densité relative à la fonctionnelle d'action \mathcal{I} . En effet, cette propriété de la densité a été démontrée dans [20, 96, 89] en approximant en plusieurs étapes une trajectoire générale π par une suite de profils de plus en plus réguliers, et nécessite donc le choix approprié d'une régularisation par convolution spatiale et temporelle.

Afin d'achever l'étape de régularisation spatiale pour des modèles qui évoluent sur tore [72, 69], il est naturel d'utiliser la convolution des trajectoires par le noyau gaussien. Dans le cas de systèmes avec réservoirs [20], cette étape n'est pas simple, car le bord du domaine empêche l'utilisation du noyau gaussien, nécessitant l'utilisation de la résolvante du mouvement brownien tué aux bord. Nous avons proposé dans notre article une démonstration plus simple pour la régularisation spatiale et temporelle : étant donné une trajectoire π , et H la fonction associée par l'équation (3.1.2), nous ap-

proximons H par une suite de fonctions régulières $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et nous montrons que la suite des trajectoires associées $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la trajectoire π et $\mathcal{I}(\pi_n) \rightarrow \mathcal{I}(\pi)$.

3.2 Modèles à longue portée avec désordre

3.2.1 Exclusion avec champ extérieur aléatoire et potentiel de Kac.

Avec E. Orlandi [89], nous avons travaillé sur les grandes déviations dynamiques de l'exclusion avec champ extérieur aléatoire perturbée par un potentiel d'interaction de Kac. Le modèle de spins que nous avons considéré évolue dans le tore de dimension $d \geq 3$, de largeur N . Le potentiel d'interaction de Kac de portée N a été défini dans (1.3.18). Le champ extérieur aléatoire est défini par des variables aléatoires indépendantes bornées de loi invariante par translation. Le processus est construit pour $\beta \geq 0$ à partir de l'hamiltonien $H_N^{\beta, \alpha}$ défini par (1.3.19), son générateur est donné par (1.3.22).

La limite hydrodynamique a été établie dans [75]. L'équation obtenue est donnée par (2.1.3), elle est construite à partir de la matrice de diffusion D définie par (2.1.13). Le comportement hydrodynamique sans le potentiel de Kac a été étudié dans [56], où la formulation variationnelle de la matrice de diffusion D a été établie par la formule de Green-Kubo (cf. (2.1.13)).

Dans cet article nous établissons, pour presque tout environnement aléatoire, un principe de grandes déviations. La fonctionnelle d'action n'est pas convexe ; nous suivons les grandes lignes de [48, 72] en adaptant à notre situation les techniques introduites dans [95, 96]. De plus, le fait que le modèle soit non-gradient et la présence du potentiel de Kac à longue portée rendent l'analyse plus délicate. Nous démontrons en outre que la fonctionnelle d'action associée aux grandes déviations est semi-continue inférieurement et admet des ensembles de niveau compacts.

3.2.2 Modèle de Glauber avec champ extérieur aléatoire et potentiel de Kac.

Avec O. Benois, E. Orlandi, E. Saada et L. Triolo [9], nous avons étudié les limites hydrodynamiques et les grandes déviations pour des modèles de Glauber soumis aux potentiels d'interaction de Kac avec champ extérieur aléatoire.

En mécanique statistique à l'équilibre et hors équilibre, plusieurs travaux ont fait l'objet d'une étude autour des modèles d'Ising avec potentiel de Kac sans désordre. Nous nous référons au livre de Presutti [94] pour une synthèse bibliographique sur le sujet. Les grandes déviations dynamiques pour ces modèles sans désordre ont été étudiées par Comets dans [31].

Nous avons considéré un modèle réversible, de spin-flip en dimension $d \geq 1$, sans loi de conservation, sur le tore de taille N , décrit dans la sous-section 1.3.2. Le potentiel d'interaction de Kac de portée N est défini par la formule (1.3.18); le générateur infinitésimal est donné pour $\beta \geq 0$ dans (1.3.23), via l'hamiltonien $H_N^{\beta, \alpha}$, défini par (1.3.19). Le champ extérieur aléatoire est déterminé par des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées qui prennent un nombre fini de valeurs $a_i \in \mathbb{R}$ avec les probabilités p_i , pour $i = 1, \dots, \ell$, où ℓ un nombre entier fixé. Les propriétés de l'équilibre statistique de ces modèles ont été largement étudiées, voir [21] pour un recueil de résultats. Des modèles similaires en dimension $d = 1$ ont été analysés dans les articles [26, 27, 28, 92].

Le principal résultat de notre article est l'obtention d'un principe de grandes déviations de la magnétisation empirique m pour presque toute configuration du désordre (en anglais, "quenched limit"). Contrairement au cas non-aléatoire étudié dans [31], notre modèle n'est pas un champ moyen; pour pallier cette difficulté, nous avons considéré le ℓ -uplet, $\bar{m} = (m_1, \dots, m_\ell)$ dont chaque composante m_i correspond au champ de la magnétisation sur l'ensemble des sites où l'environnement prend la valeur a_i . Chaque composante du vecteur aléatoire \bar{m} peut alors être traitée comme un champ moyen, en tenant compte du fait que toutes les composantes sont liées entre elles. Puisque $m = \sum_{i=1}^{\ell} m_i$, le principe des grandes déviations de la magnétisation m est ensuite obtenu par le principe de contraction.

3.3 Modèles à longue portée avec réservoirs

Comme nous l'avons signalé dans le chapitre 2, les systèmes à longue portée interagissant via un potentiel d'interaction de Kac ont suscité un intérêt considérable dans l'étude de la séparation de phases des états d'équilibre pour les systèmes de particules. Les versions dynamiques de ces gaz sur réseau dans le cas périodique (sans réservoirs) et en volume infini \mathbb{Z}^d , ont été analysées dans [64, 65, 66, 2, 85, 75, 89]. Les états d'équilibre pour ces systèmes sur le tore ou en volume infini, ont également été largement examinés [68, 81, 93, 94]. Une perspective naturelle est alors d'examiner la possibilité d'étendre ces résultats aux systèmes avec réservoirs.

Dans cet esprit, dans l'article [91] nous avons étudié avec E. Orlandi un système de particules qui modélise un gaz sur réseau à longue portée, évoluant dans un domaine borné auquel nous avons imposé des réservoirs à la frontière. La dynamique à l'intérieur du domaine suit un processus de Kawasaki perturbé par un potentiel de type interaction de Kac. Afin de décrire le modèle simplement, plaçons nous en dimension 1, et considérons un entier N assez grand et deux densités (du bord) positives $0 < \rho^- \leq \rho^+ < 1$. L'espace macroscopique est le segment $\Lambda = [-1, 1]$ et les particules évoluent au niveau microscopique sur l'espace $\Lambda_N = \{-N, \dots, N\}$. Pour définir l'interaction entre particules, comme dans (1.3.18), on considère un noyau de probabilité invariant par translation $J(\cdot, \cdot)$, symétrique, régulier et de rang 1 : $J(u, v) = J(0, v - u)$ pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $J(0, u) = 0$ pour tout $|u| \geq 1$, et $\int J(0, u) du = 1$.

À cause de la frontière et en tenant compte du confinement des particules à l'intérieur du domaine, une modification du potentiel de Kac (1.3.19) est nécessaire. Pour x et y dans Λ_N , en plus de l'interaction de paire $J(x/N, y/N)$ entre x et y , nous imposons au site x (au moyen du potentiel $J(\cdot, \cdot)$), les interactions entre x/N et les réflexions de y/N par rapport aux points -1 et $+1$. Le potentiel d'interaction de Kac pour le modèle avec réservoirs, que nous appelons l'interaction de "Neuman" est alors défini par

$$J^{neum}(u, v) = J(u, v) + J(u, 2 - v) + J(u, -2 - v).$$

Nous obtenons un noyau de probabilité symétrique sur Λ :

$$J^{neum}(u, v) = J^{neum}(v, u) \quad \text{et} \quad \forall u \in \Lambda, \quad \int_{\Lambda} J^{neum}(u, v) dv = 1.$$

Ainsi, on définit l'interaction de paire entre deux sites x and y de Λ_N par

$$J_N(x, y) = N^{-1} J^{neum}\left(\frac{x}{N}, \frac{y}{N}\right),$$

et l'énergie d'interaction totale est donnée comme dans (1.3.19) par l'hamiltonien

$$H_N(\eta) = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Lambda_N} J_N(x, y) \eta(x) \eta(y). \quad (3.3.1)$$

Signalons que ce choix d'interaction et de potentiel a été utilisé dans [34].

Nous avons étudié le processus dans le cas diffusif. Le générateur du processus de Markov qui caractérise le système de particules est de type (1.3.29) ; la partie du générateur qui décrit l'évolution des particules à l'intérieur du domaine est de type (1.3.22) avec $\beta > 0$ et $\alpha \equiv 1$, et au bord la dynamique

est construite de telle façon qu'elle fixe les densités respectives ρ^- et ρ^+ aux bords gauche et droit.

Le comportement hydrodynamique du système partant d'une mesure associée à un profil donné est démontré pour tout $\beta > 0$. L'équation est différentielle intégrale quasilineaire de type (2.1.3), avec $D = I$ et condition de Cauchy au bord, où I désigne la matrice identité.

La limite hydrostatique est obtenue seulement pour β plus petit qu'une certaine valeur $\beta_0 = \beta_0(\Omega, J)$. Nous avons suivi l'approche de [58], basée sur le fait que l'équation stationnaire est un attracteur global de l'équation hydrodynamique. La restriction à β_0 vient de ce que nous étions dans l'incapacité de démontrer cette dernière propriété pour β petit.

Le second résultat principal de l'article concerne les grandes déviations des mesures empiriques autour de la limite hydrodynamique.

Chapitre 4

Perspectives

Dans cette section nous passons rapidement en revue quelques thèmes de réflexion sur les sujets abordés dans le mémoire. Certains problèmes constituent des travaux en cours.

Les références citées avec les initiales des auteurs se trouvent à la fin de ce chapitre.

4.1 Modèles à longue portée avec réservoirs

Que ce soit pour l'étude des propriétés dynamiques ou pour la séparation de phases des états d'équilibre, les modèles à longue portée interagissant via un potentiel d'interaction de Kac ont suscité un intérêt considérable dans l'étude des gaz sur réseau. Une description de ces systèmes a été fournie dans la synthèse (voir sous-section 1.3.2. pour leur introduction, la section 2.2 pour leurs limites hydrodynamiques, et les sections 3.2 et 3.3 en ce qui concerne les résultats sur les grandes déviations). Nous renvoyons au livre de E. Presutti [94] pour une étude synthétique et bibliographique sur les travaux existants. Une perspective naturelle est d'examiner la possibilité d'étendre ces résultats aux systèmes avec réservoirs.

Diverses versions dynamiques des systèmes à longue portée avec potentiel de Kac, dans le cas périodique (sans réservoirs) et en volume infini (\mathbb{Z}^d), ont été analysées dans [64, 65, 66, 2, 85, 88, 89, 90]. Dans un article récent [34], De Masi, Presutti & Tsagkarogiannis ont analysé les équations macroscopiques associées à ces modèles sur un segment borné, en dimension 1 avec conditions aux limites. Ils ont construit, dans le régime de transition de phase, des solutions stationnaires de ce type de problème aux limites, et ont étudié la validité de la loi de Fourier dans la limite thermodynamique. Dans

[91], avec E. Orlandi, nous avons étudié les comportements hydrodynamique et hydrostatique, ainsi que les grandes déviations autour de la limite hydrodynamique. Nous avons considéré un système qui modélise un gaz sur réseau à longue portée, évoluant dans un domaine borné auquel nous avons imposé des réservoirs à la frontière. La dynamique à l'intérieur du domaine suit un processus de Kawasaki perturbé par un potentiel d'interaction de Kac. La dynamique qui modélise l'action des réservoirs aux bords du domaine est un processus de Glauber qui consiste à imposer deux densités ρ_- et ρ_+ aux bords gauche et droit du segment. Différentes questions se posent :

1. Étendre ces résultats aux dimensions supérieures.
2. Étudier les modèles avec différentes conditions aux bords.
3. Étudier les grandes déviations pour la mesure stationnaire hors équilibre.
4. Obtenir des équations hydrodynamiques dont les matrices de diffusion sont dégénérées, et étudier les états stationnaires associés.

4.2 Limites incompressibles

Une question qui nous intéresse est la dérivation des équations de Navier-Stokes dans un domaine borné avec conditions au bord. Il s'agit de la suite de l'article [7], décrit dans la section 2.1. Avec O. Benois, R. Esposito et R. Marra, nous avons étudié la limite incompressible du processus d'exclusion simple asymétrique dans un domaine ouvert, muni de réservoirs de particules à sa frontière. Les réservoirs, de densité constante, sont modélisés par des processus de naissances et de morts. Nous prouvons que, lorsque la densité initiale et la densité des réservoirs sont proches de $1/2$, le champ de densité empirique converge vers l'équation de Burgers avec conditions de Dirichlet au bord. Le premier problème concerne la généralisation des travaux de [7] au cas où la densité initiale est proche d'une constante quelconque $0 < a < 1$.

Le second problème porte sur des modèles plus complexes, qui permettent d'obtenir rigoureusement, comme limite incompressible, les équations de Navier-Stokes dans un domaine borné avec des conditions de Dirichlet au bord. Il s'agit d'étudier le comportement hydrodynamique et les grandes déviations pour les modèles considérés dans les articles ([EMY], [QY]) dans un domaine ouvert avec conditions au bord du domaine.

4.3 Les équations de réaction-diffusion

Ces équations ont été largement étudiées dans la littérature. Leurs domaines d'applications sont très nombreux : la mécanique, la physique, la chimie, la technologie, la biologie et de nombreux autres domaines.

Les équations de réaction-diffusion ont fait l'objet d'une étude dans les articles [86] et [87], elles sont de type

$$\partial_t \rho = \Delta \rho + F(\rho). \quad (4.3.1)$$

Les dynamiques microscopiques considérées sont des processus de sauts, de naissances et de morts. Au niveau microscopique, les particules se déplacent suivant des marches aléatoires indépendantes (ce qui donne par passage à la limite, le terme laplacien $(\Delta \rho)$ dans la limite hydrodynamique. Le terme source $F(\cdot)$ s'écrit sous la forme $F(\rho) = \tilde{b}(\rho) - \tilde{d}(\rho)$, où $\tilde{b}(\rho)$ (resp. $\tilde{d}(\rho)$) dépend du processus et plus précisément du taux de naissance (resp. de mort) de particules au niveau microscopique. Des améliorations ou généralisations peuvent être apportées aux travaux concernant ces modèles dans plusieurs directions.

- *Modèles avec réservoirs et mesures stationnaires.* Une question naturelle suite à l'obtention de la limite hydrodynamique est l'étude des grandes déviations pour ces processus non conservatifs. Les grandes déviations ont été étudiées sous des conditions de convexité sur le terme source $F(\cdot)$, d'abord par Jona-Lasinio, Landim & Vares [JLV] sur un domaine avec conditions périodiques (le tore), puis récemment par Bodineau & Lagouge dans deux articles ([BL1], [BL12]), en dimension 1 pour des modèles avec réservoirs.

Le premier problème porte sur l'étude de l'hydrostatique, et sur l'extension des résultats sur les grandes déviations à toutes les dimensions et avec des conditions plus faibles sur le terme source F .

Un autre problème d'intérêt concerne les fluctuations pour ces modèles. Signalons que même sur le tore, les mesures invariantes ne sont pas connues explicitement. Il s'agirait alors d'obtenir des fluctuations pour des systèmes hors équilibre.

- *Explosion en temps fini ("Blow-up").* Une des propriétés les plus remarquables des équations de type (4.3.1) est la possibilité qu'elles produisent des singularités. En effet, même à partir de données régulières, la solution peut développer des singularités en temps fini, celles-ci sont produites en raison de la présence du terme non linéaire F . Elles sont dues à une croissance rapide vers l'infini de la densité dans un temps fini. Le phénomène est connu sous le nom d'explosion ("blow-up").

Dans cette perspective, il est intéressant de comprendre le comportement microscopique de ce genre de systèmes, et en particulier d'étudier leurs singularités.

- *Systèmes d'équations de réaction-diffusion.* Les systèmes d'équations de réaction-diffusion couplées, peuvent être obtenus à partir des systèmes de particules. Les dynamiques microscopiques en question décrivent l'évolution de plusieurs espèces (de particules) qui cohabitent dans un environnement et qui rentrent en compétition. Ces processus sont utilisés comme modèles pour les réactions chimiques, l'épidémiologie, les dynamiques de populations. . .

Il serait intéressant d'étudier les grandes déviations autour de la limite hydrodynamique, ainsi que les problèmes liés aux mesures stationnaires hors équilibre.

4.4 Références (avec les initiales des auteurs)

- [B1] Blount. D. : Comparison of stochastic and deterministic models of a linear chemical reaction with diffusion. *Ann. Prob.* **19** (4), (1991), 1440–1462.
- [B2] Blount. D. : Law of large numbers in the supremum norm for a chemical reaction with diffusion. *The Ann. App. Prob.*, **2** (1), (1992), 131–141.
- [BL1] Bodineau, T., Lagouge, M. : Current large deviations in a driven dissipative model, *J. Stat. Phys.* **139**, no. 2, (2010), 201-219.
- [BL2] Bodineau, T., Lagouge, M. : Large deviations of the empirical currents for a boundary driven reaction diffusion model, *Annals of Applied Prob* (To appear).
- [EMY] Esposito, R., Marra, R., Yau, H.T. : Navier-Stokes equations for stochastic particle systems on the lattice, *Commun. Math. Phys.*, **182** (1996), 395–456.
- [JLV] Jona-Lasinio, G., Landim, C., M. E. Vares, M. E. : Large deviations for a reaction-diffusion model, *Probability Theory and Related Fields*, **97**, (1993), 339-361.
- [QY] Quastel, J., Yau, H.-T. : Lattice gases, large deviations, and the incompressible Navier-Stokes equations. *Ann. of Math.* (2), **1**, 148, (1998), 51–108.

Liste des travaux

précédés de leur numéros dans la bibliographie

- [91] Mourragui, M., Orlandi, E. : Macroscopic properties and dynamical large deviations of the boundary driven Kawasaki process with long range interaction. *Nonlinearity*, **26**, 141-175. (2013)
- [9] Benois, O., Mourragui, M., Orlandi, E., Saada, E., Triolo, L. : Quenched large deviations for Glauber evolution with Kac interaction and Random Field. *Markov Processes Relat. Fields*, **18**, p. 215-268. (2012)
- [58] Farfan, J., Landim, C., Mourragui, M. : Hydrostatics and dynamical large deviations of boundary driven gradient symmetric exclusion processes. *Stochastic Processes and their Applications*, **121**, N. 4, p. 725-758. (2011)
- [20] Bertini, L., Landim, C., Mourragui, M. : Dynamical large deviations for the boundary driven weakly asymmetric exclusion process. *Ann. Probab.* Volume 37, N. 6, p. 2357-2403. (2009)
- [90] Mourragui, M., Orlandi, E. : Lattice gas model in random medium and open boundaries : hydrodynamic and relaxation to the steady state. *Journal of Statistical Physics*. Volume 136, p. 685-714. (2009)
- [89] Mourragui M., Orlandi E. : Large deviations from a macroscopic scaling limit for particle systems with Kac interaction and random potential. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités*, **43**, p. 677-715. (2007)
- [7] Benois, O., Esposito, R., Marra, R., Mourragui, M. : Hydrodynamics of a driven lattice gas with open boundaries : The asymmetric simple exclusion. *Markov Processes and Relat. Fields*. **10**, p. 89-112. (2004)
- [88] Mourragui, M. Orlandi, E. and Saada, E. : Macroscopic evolution of particle systems with random field Kac interaction. *Nonlinearity*. **16**, p. 2123-2147, (2003)
- [75] Landim C., Mourragui M., Sellami S. : Hydrodynamical limit for a nongradient interacting particle system with stochastic reservoirs.
– *Teor. Veroyatnost. i Primenen. Probab.* **45**, N. 4, p. 694–717, (2000)
– Translation in *Theory Probab. Appl.* **45**, N. 4, p. 604–623, (2002)
- [85] Marra R., Mourragui M. : Phase segregation dynamics for the Blume-Capel model with Kac interaction. *Stoch. Proc. Appl.* **88**, p. 79–124, (2000)

- [74] Landim, C., Mourragui, M. : Hydrodynamic limit of mean zero asymmetric zero range processes in infinite volume. *Ann. Inst. Henri. Poincaré*. Vol 33, N. 1, p. 361-385, (1997)
- [87] Mourragui, M. : Entropie relative et comportement hydrodynamique des processus de sauts, de naissances et de morts. *Ann. Inst. Henri. Poincaré*. **32**, no. 3, p. 361-385, (1996)
- [86] Mourragui, M. : Limite hydrodynamique d'un processus de sauts, de naissances et de morts. *C. R. Acad. Sci. Paris*,. **316**, Série **I**, p. 921-924, (1993)

Bibliographie

- [1] Andjel, E.D. : Invariant measures for the zero range processes. *Ann. Probab.* **10**, (1982), no. 3, 525-547.
- [2] Asselah, A., Giacomin, G. : Metastability for the exclusion process with mean-field interaction. *J. Statist. Phys.*, **93**, (1998), no 5-6, 1051-1110.
- [3] Bahadoran, C. : Hydrodynamical limit for spatially heterogeneous simple exclusion processes. *Probab Theory Related Fields*, **110**, (1998), no. 3, 287-331.
- [4] Bahadoran, C. : Blockage hydrodynamics of one-dimensional driven conservative systems. *Ann. Probab.* **32**,(2004), 805-854.
- [5] Bahadoran, C., Guiol, H., Ravishankar, K., Saada, E. : A constructive approach to Euler hydrodynamics for attractive particle systems. Application to k-step exclusion. *Stochastic Process. Appl*, **99**, (2002), 1-30.
- [6] Beltrán, J., Landim, C. : A lattice gas model for the incompressible Navier–Stokes equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Statist.* **44**, (2008), no. 5, 886-914.
- [7] Benois, O., Esposito, R., Marra, R., Mourragui, M. : Hydrodynamics of a driven lattice gas with open boundaries : The asymmetric simple exclusion. *Markov Process. Related Fields*, **10**, (2004), no. 1, 89-112.
- [8] Benois O., Koukkous A., Landim C. : Diffusive behaviour of asymmetric zero range processes. *J. Stat. Phys.* **87**, (1997), 577–591.
- [9] Benois, O., Mourragui, M. , Orlandi, E., Saada, E., Triolo, L. : Quenched large deviations for Glauber evolution with Kac interaction and Random Field. *Markov Process. Related Fields*, **18**, (2012), 215-268.

- [10] Bernardin, C. : Regularity of the diffusion coefficient for lattice gas reversible under Bernoulli measures. *Stoch. Proc. Appl.* 101, (2002), 43-68.
- [11] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Fluctuations in stationary non equilibrium states of irreversible processes. *Phys. Rev. Lett.* 87, 040601 (2001).
- [12] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Macroscopic fluctuation theory for stationary non equilibrium state. *J. Statist. Phys.* 107, (2002), 635–675.
- [13] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Large deviations for the boundary driven simple exclusion process. *Math. Phys. Anal. Geom.* **6**, 231–267 (2003).
- [14] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Current fluctuations in stochastic lattice gases. *Phys. Rev. Lett.* 94, 030601 (2005).
- [15] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Non equilibrium current fluctuations in stochastic lattice gases. *J. Statist. Phys.* 123, (2006), 237-276.
- [16] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Large deviation approach to non equilibrium processes in stochastic lattice gases. *Bull. Braz. Math. Soc., New Series* **37**, (2006), 611-643.
- [17] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Large deviations of the empirical current in interacting particle systems. *Theory of Probability and its Applications*, 51, (2007), 2–27.
- [18] Bertini L., Gabrielli D., Lebowitz J. : Large deviations for a stochastic model of heat flow. *J. Stat. Phys.* **121**, (2005), no 5-6, 843-885.
- [19] Bertini L., Gabrielli D., Landim C. : Strong asymmetric limit of the quasi-potential of the boundary driven weakly asymmetric exclusion process. *Comm. Math. Phys.*, **289**, (2009), 311-334.
- [20] Bertini, L. Landim, C., Mourragui, M. : Dynamical large deviations for the boundary driven weakly asymmetric exclusion process. *Ann. Probab.* Volume 37, Number 6, (2009), 2357-2403.
- [21] Bodineau T. : Interfaces in a one dimensional Ising spin system. *Stoch. Proc. Appl.*, **61**, (1996), 1–23.
- [22] Bodineau, T., Derrida, B. : Current fluctuations in non-equilibrium diffusive systems : an additivity principle. *Phys. Rev. Lett.*, 92, 180601, (2004).

- [23] Bodineau, T., Derrida, B. : Distribution of current in nonequilibrium diffusive systems and phase transitions. *Phys. Rev. E* (3) **72**, (2005), no. 6, 066110
- [24] Bodineau, T., Derrida, B. : Current large deviations for asymmetric exclusion processes with open boundaries. *J. Stat. Phys.* **123**, (2006), no. 2, 277-300
- [25] Bodineau, T., Giacomin, G. : From Dynamic to Static Large Deviations in boundary Driven Exclusion Particle Systems. *Stoch. Proc. Appl.* **110**, (2004),67-81.
- [26] Cassandro M., Orlandi E., Presutti E. : Interfaces and typical Gibbs configurations for one-dimensional Kac potentials. *Probab. Th. Related Fields*,, **96**, (1993), 57-96.
- [27] Cassandro M., Orlandi E., Picco P. : Typical configurations for one-dimensional random field Kac model. *Ann. Probab.* **27**, No 3, (1999), 1414–1467.
- [28] Cassandro M. , Orlandi E., Picco P., Vares M.E. : Typical configurations for one-dimensional random field Kac model : localization of the phases. *in preparation*.
- [29] Cassandro M, Presutti E. : Phase transitions in Ising systems with long but finite range interactions. *Markov Process and related Fields*, **2**, (1996), 241–262.
- [30] Chen, M.F. : *From Markov chains to non-equilibrium particle systems*. World Scientific. Singapore. (1992).
- [31] Comets, F. : Nucleation for a long range magnetic model. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Statist.* **23**, (1987), no. 2 135–178.
- [32] DeMasi, A., Ferrari, P. : A remark on the hydrodynamics of the zero range processes. *J. Stat. Phys.* **36**, (1984), 81-87.
- [33] De Masi A., Orlandi E., Presutti E., Triolo L. : Glauber evolution with Kac potentials I. Mesoscopic and macroscopic limits, interface dynamics. *Nonlinearity*, **7**, (1996), 287–301.
 - Glauber evolution with Kac potentials II. Fluctuation. *Nonlinearity*, **9**, (1996), 27–51.
 - Glauber evolution with Kac potentials. III. Spinodal decomposition. *Nonlinearity*, **9**, (1996), 53–114.
- [34] De Masi A., Presutti E., Tsagkarogiannis D. : *Fourier Law, phase transition and the stationary Stephan problem*. *Arch. Rat. Mech. Anal.* DOI : 10.1007/s00205-011-0423-1,

- [35] De Masi, A., Presutti, E., *Mathematical methods for hydrodynamic limits*. Volume 1501 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1991).
- [36] De Masi A., Presutti E., Scacciatelli E. : The weakly asymmetric simple exclusion process. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités.* **25**, (1989), 1–38.
- [37] Derrida B. : Non equilibrium steady states : fluctuations and large deviations of the density and of the current. *J. Stat. Mech. Theory Exp.* P07023, (2007).
- [38] B. Derrida, J.L. Lebowitz, E.R. Speer : Large deviation of the density profile in the steady state of the open symmetric simple exclusion process. *J. Statist. Phys.* **107**, (2002), 599–634.
- [39] Derrida B., Lebowitz J.L., Speer E.R. : Exact large deviation functional of a stationary open driven diffusive system : the asymmetric exclusion process. *J. Statist. Phys.* **110**, (2003), 775–810.
- [40] Deuschel, J. D., Stroock, D. W., *Large Deviations*, Academic Press, San Diego, (1989).
- [41] Dobrushin, R.L. : Markov processes with a large number of locally interacting components : existence of a limit process and his ergodicity. *Problems Inform. Transmission*, **7**, (1971), 149–164.
- [42] Dobrushin, R.L. : Markov processes with many locally interacting components : the reversible case and generalization. *Problems Inform. Transmission*, **7** (1971), 235–241.
- [43] Dobrushin, R.L. : Caricature of Hydrodynamics, proceed. *IX-th International Congress of Math-Phys.*, 17–27 July 1988, Simon, Truman, Davies ed., Adam Hilger (1989), 117–132.
- [44] Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S. : Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time I. *Commun. Pure Appl. Math*, **28**, (1975), 1-47.
- [45] Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S. : Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time II. *Commun. Pure Appl. Math*, **28**, (1975), 279-301.
- [46] Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S. : Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time III. *Commun. Pure Appl. Math*, **29**, (1976), 389-461.
- [47] Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S. : Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time IV. *Commun. Pure Appl. Math*, **36**, (1983), 183-212.

- [48] Donsker M. D., Varadhan S. R. S. : Large Deviations from a hydrodynamic scaling limit. *Commun. Pure Appl. Math.* **42**, (1989), 243–270.
- [49] Durrett, R. : *ten lectures on particle systems*. Saint Flour Lecture Notes, *Lect. Notes. Math.* **1608**, (1995), 97-201.
- [50] Enaud C., Derrida B. : Large deviation functional of the weakly asymmetric exclusion process. *J. Statist. Phys.* **114**, (2004), 537–562.
- [51] Esposito R., Marra R. : On the derivation of the incompressible Navier-Stokes equation for Hamiltonian particle systems, *Jour. Stat. Phys.*, **74**,(1993), 981-1004.
- [52] Esposito, R., Marra, R., Yau, H.T. : Diffusive limit of asymmetric simple exclusion. *Review in Math. Phys.* **6**, (1994), 1233-1267.
- [53] Esposito, R., Marra, R., Yau, H.T. : Navier-Stokes equations for stochastic particle systems on the lattice, *Commun. Math. Phys.*, **182**, (1996), 395–456.
- [54] Eyink G., Lebowitz J. L., Spohn H. : Hydrodynamics of stationary nonequilibrium states for some lattice gas models. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **132**, (1990), 252-283.
- [55] Eyink G., Lebowitz J. L., Spohn H. : Lattice Gas Models in Contact with Stochastic Reservoirs : Local Equilibrium and Relaxation to the Steady State. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **140**, (1991), 119-131.
- [56] Faggionato, A., Martinelli F. : Hydrodynamic limit of a disordered lattice gas. *Prob. Th. Rel. Fields* **127**, (4), (2003), 535–608.
- [57] Farfan J. : Stationary large deviations of boundary driven exclusion processes. *Preprint arXiv :0908.1798*, (2009).
- [58] Farfan, J.S. Landim, C., Mourragui, M. : Hydrostatics and dynamical large deviations of boundary driven gradient symmetric exclusion processes. *Stochastic Processes and their Applications*, (2010).
- [59] Ferrari P. A., Presutti E., Vares M. E. : Nonequilibrium fluctuations for a zero range process, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **24**, (1988), 237–268.
- [60] Freidlin, M.I., Wentzell, A.D. : *Random Perturbation of Dynamical Systems*, translated by J. Szuc, Springer, Berlin (1984).
- [61] Fritz, J. : On the diffusive nature of the entropy flow in infinite systems : remarks to a paper by Guo-Papanicolau-Varadhan. *Commun. Math. Phys.* **133**, (1990), 331-352.

- [62] Galves, A., Kipnis, C., Marchioro, C., Presutti, E. : Nonequilibrium measures which exhibit a temperature gradient : study of a model. *Commun. Math. Phys.* **81**, (1981), 127-148.
- [63] Gärtner J. : Convergence towards Burger's equation and propagation of chaos for weakly asymmetric exclusion processes. *Stoch. Proc. Appl.* **27**, (1988), 233–260.
- [64] Giacomin G., Lebowitz J. L. : Phase segregation dynamics in particle systems with long range interaction I. Macroscopic limits. *J. Stat. Phys.* **87**(1997), 37–61.
- [65] Giacomin G., Lebowitz J. L. : Phase segregation dynamics in particle systems with long range interaction II. Interface Motion. *SIAM J. Appl. Math.* **58**(1998), 1707–1729.
- [66] Giacomin, G., Lebowitz, J. L., Marra, R. : Macroscopic evolution of particle systems with short- and long-range interactions. *Nonlinearity*. **13**, (2000), 2143–2162.
- [67] Guo M.Z., G. Papanicolau G., Varadhan S.R.S. : Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions. *Comm. Math. phys.* **118**, (1988), 31–59.
- [68] Kac M., Uhlenbeck G., Hemmer P.C. : On the van der Waals theory of vapour-liquid equilibrium.
 - I. Discussion of a one-dimensional model. *J. Math. Phys.* **4** (1963), 216–228.
 - II. Discussion of the distribution functions. *J. Math. Phys.* **4** (1963), 229–247.
 - III. Discussion of the critical region. *J. Math. Phys.* **5** (1964), 60–74.
- [69] Kipnis C.; Landim C. : *Scaling limits of interacting particle systems*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 320. Springer-Verlag, Berlin, (1999).
- [70] Kipnis C., Landim C., Olla S. : Hydrodynamical limit for a non-gradient model : the generalized exclusion processes, *Comm. Pure Appl. Math.*, **47**, (1994), pp. 1475–1545.
- [71] Kipnis C., Landim C., Olla S. : Macroscopic properties of a stationary non-equilibrium distribution for a non-gradient interacting particle system. *Ann. Inst. H. Poincaré.*, Vol. **31**, (1995), pp. 191-221.

- [72] Kipnis C., Olla S., Varadhan S.R.S. : Hydrodynamics and large deviations for simple exclusion processes. *Commun. Pure Appl. Math.* **42**, (1989), 115–137.
- [73] Landim, C. : Conservation of local equilibrium for asymmetric attractive particle systems on \mathbb{Z}^d , *Ann. Probab.*, **21**, (1993), 1782-1808.
- [74] Landim, C. and Mourragui, M. : Hydrodynamic limit of mean zero asymmetric zero range processes in infinite volume. *Ann. Inst. Henri Poincaré*. Vol 33, N. 1, (1997), 361-385.
- [75] Landim C., Mourragui M., Sellami S. : Hydrodynamical limit for a nongradient interacting particle system with stochastic reservoirs.
 - *Teor. Veroyatnost. i Primenen. Probab.* **45**, N. 4, (2000), 694–717.
 - Translation in *Theory Probab. Appl.* **45**, N. 4, (2002), 604–623.
- [76] Landim C., Olla O., S. Varadhan S.R.S. : Symmetric simple exclusion process : regularity of the self diffusion coefficient. *Commun. Math. Phys.* **224**, (2001), 307–321.
- [77] Landim, C., Olla, S., Varadhan, S.R.S. : Finite-dimensional approximation of the self-diffusion coefficient for the exclusion process. *Ann. Probab.* Volume 30, Number 2, (2002), 483-508.
- [78] Landim, C., Olla, S., Yau, H.T. : First order correction for the hydrodynamic limit of asymmetric simple exclusion processes in dimension $d \geq 3$, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 50, (1997), 149-203.
- [79] Landim, C., Sued, M., Valle, G. : Hydrodynamic Limit of Asymmetric Exclusion Processes Under Diffusive Scaling in $d \geq 3$. *Commun. Math. Phys.* **249**, N. 2, (2004), 215-247.
- [80] Lebowitz J.L., Mazel A, Presutti E. : Liquid-vapor phase transitions for systems with finite range interactions. *J. Stat. Phys.* **94**, (1999), No 5-6, 955–1025.
- [81] Lebowitz J., Penrose O. : Rigorous treatment of the Van der Waals Maxwell theory of the liquid-vapour transition. *J. Math. Phys.* **7**, (1966), 98–113.
- [82] Liggett, T.M. : *Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag. Berlin, New York, (1985).
- [83] Liggett, T.M. : *Stochastic Interacting Systems : Contact, Voter and Exclusion Processes*. Springer Verlag., (1999).
- [84] Liggett, T.M. : *Continuous time Markov processes : an introduction*. Graduate Studies in Mathematics., Vol 113, AMS. (2010).

- [85] Marra R., Mourragui M. : Phase segregation dynamics for the Blume-Capel model with Kac interaction. *Stoch. Proc. Appl.* **88**(2000), 79–124.
- [86] Mourragui, M. : Limite hydrodynamique d'un processus de sauts, de naissances et de morts. *C. R. Acad. Sci. Paris*,. **316**, Série **I**, (1993), 921-924.
- [87] Mourragui, M. : Entropie relative et comportement hydrodynamique des processus de sauts, de naissances et de morts. *Ann. Inst. Henri Poincaré.* **32**, no. 3, (1996), 361-385.
- [88] Mourragui, M. Orlandi, E., Saada, E. : Macroscopic evolution of particle systems with random field Kac interaction. *Nonlinearity* **16**, (2003), 2123-2147.
- [89] Mourragui M. and Orlandi E. : Large deviations from a macroscopic scaling limit for particle systems with Kac interaction and random potential. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités*, **43**, (2007), 677-715.
- [90] Mourragui, M. Orlandi, E. : Lattice gas model in random medium and open boundaries : hydrodynamic and relaxation to the steady state. *Journal of Statistical Physics*. Volume 136, (2009), 685-714.
- [91] Mourragui, M., Orlandi, E. : Macroscopic properties and dynamical large deviations of the boundary driven Kawasaki process with long range interaction. *To be published in Nonlinearity*, **26**, (2013) 141-175.
- [92] Orlandi, E., Picco, P. : Weak large deviations principle for one dimensional random field Kac model. *Electron. J. Probab.* 14, (2009), 1372–1416.
- [93] Penrose, O., Lebowitz, J.L. : Rigorous treatment of metastable states in the Van der Waals Maxwell theory , *J. Statist. Phys.*, **3**, (1971), 211-236.
- [94] Presutti, E. : *Scaling limits in Statistical Mechanics and Microstructures in Continuum of Mechanics*. Springer. Berlin, Theoretical and mathematical Physics, (2010).
- [95] Quastel, J. : Diffusion of color in the simple exclusion process, *Comm. Pure. Appl. Math*, **XLV**, (1992), 623-679.
- [96] Quastel, J., Rezakhanlou, F., Varadhan, S. R. S. : Large deviations for the symmetric simple exclusion process in dimensions $d \geq 3$, *Probab. Th. Rel. Fields.* **113**, (1999), 1–84.

- [97] Rezakhanlou, F. : Hydrodynamic limit for attractive particle systems on Z^d . *Comm. Math. Phys.*, **140**, (1990), 417-448.
- [98] Seppalainen, T. : Existence of hydrodynamics for the totally asymmetric simple K-exclusion process. *Ann. Probab.* **27**, (1999), 361–415.
- [99] Spitzer, F. : Random process defined through the interaction of an infinite particle system. *Springer Lecture Notes in Mathematics*, vol 89, (1969), 201–223.
- [100] Spitzer, F. : Interaction of Markov Processes, *Adv. Math.* **5**, (1970), 246–290.
- [101] Spohn, H. : *Large Scale Dynamics of Interacting particles*. Springer-Verlag, Berlin, (1991).
- [102] Temam, R. : Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, *North Holland, Amsterdam*, (1984).
- [103] Varadhan S.R.S. : Large Deviations and Applications. *CBMS- NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, **46** (1984).
- [104] Varadhan S.R.S. : Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions II. in *Asymptotic Problems in Probability Theory : Stochastic Models and Diffusion on Fractals*, edited by K. Elworthy and N. Ikeda, Pitman Research Notes in Mathematics 283, Wiley (1994).
- [105] Yau H. T. : Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models. *Letters Math. Phys.* **22**, (1991), 63–80.
- [106] Yau, H. T. : Metastability of Ginzburg-Landau model with a conservation law, *J. Stat. Phys.* **74**, (1994), 705-742.