

Sujet de thèse: Etude de couches limites pour des systèmes magnéto-hydrodynamiques incompressibles avec ou sans rotation.

Direction: Léo Glangetas, Van-Sang Ngo, Chao-Jiang Xu

Objectif

L'objectif de ce projet de thèse est l'étude asymptotique de systèmes de fluides géophysiques complexes dans des domaines avec bord quand la viscosité tend vers zéro. Des facteurs importants seront pris en compte tels que la rotation et le champ magnétique de la Terre.

Contexte

Pour les fluides classiques en général, l'écoulement est difficile à étudier dans les domaines avec bords, surtout avec un régime de faible viscosité. En effet, la friction entre les particules du fluide et le bord du domaine crée une zone de transition où l'on observe un changement entre l'écoulement laminaire loin du bord et l'écoulement turbulent près du bord. Le comportement du fluide dans ces « couches limites » a été modélisé pour la première fois par L. Prandtl en 1905 avec l'équation maintenant bien connue sous le nom de *l'équation de Prandtl*. Bien qu'elle soit largement utilisée en physique ou dans l'industrie et malgré de nombreux travaux et efforts, la justification rigoureuse de la théorie de Prandtl reste un vrai défi pour la communauté mathématique.

Dans les modèles de fluides physiques et géophysiques, d'autres facteurs doivent être pris en compte comme la densité, la température, la salinité, la rotation, le champ magnétique, etc ... Dans le cadre de ce projet, nous proposons l'étude de systèmes dérivés de la géophysique qui sont un couplage d'une équation de Navier-Stokes décrivant la vitesse du fluide et d'une autre équation de type Maxwell décrivant l'effet du champ magnétique généré par les mouvements des particules chargées. Ces systèmes interviennent dans des modèles de champs magnétiques terrestres, de météorologie et d'océanographie [CDGG06-chapitre 10], [DDG99-01], [R04-05].

Avec la prise en compte de la rotation de la terre ou la présence de champs magnétiques, des descriptions de couches limites ont été beaucoup étudiées par des modèles de type Ekman, Ekman-Hartmann, comme par exemple dans [DDG99-01, R04-05] et plus récemment [LXY17], [XY18].

Déroulement prévisionnel de la thèse

L'objet de cette thèse sera dans un premier temps d'étudier l'application de la théorie de Prandtl dans des modèles de type Ekman-Hartmann en utilisant les méthodes de [AWXY15] et [LNX19]. Ce sont des techniques qui utilisent des outils de l'analyse des équations aux dérivées partielles dans le cadre d'espaces fonctionnels de type Sobolev ou de Gevrey. Dans les deux premières années de thèse, on pourrait donc espérer avoir un ou deux résultats importants sur l'existence et la régularité des solutions de ces modèles.

Dans un deuxième temps il s'agira d'étudier certaines solutions des équations classiques de fluides perturbées par un terme de rotation ou de forces magnétiques. Plus précisément, on propose de regarder la stabilité, l'instabilité ou les bifurcations possibles de solutions particulières de type ondes progressives (voir [DDG01]), avec des méthodes de l'analyse non-linéaires comme celles utilisées dans [GR96]. Cette partie se déroulera pendant la troisième année de thèse et permettra au doctorant(e) de consolider ses acquis dans les techniques pointues d'analyse nonlinéaire des EDP. Cela devrait aussi lui permettre d'avoir un spectre de recherche plus large pour la suite de sa carrière.

Collaborations internationales

Ce projet renforce les collaborations déjà existantes des directeurs de thèse avec des équipes en Chine (Tong Yang, Yaguang Wang, collaborateurs de Chao-Jiang Xu, Wei-Xi Li collaborateur de Van-Sang Ngo et Chao-Jiang Xu, Haoguang Li collaborateur de Léo Glangetas et Chao-Jiang Xu, etc ...). Le doctorant aura ainsi la possibilité de nouer des contacts avec des chercheurs étrangers et ainsi partir en mission durant sa thèse.

Perspectives

Ce projet permettra de consolider l'expertise scientifique du laboratoire dans l'étude des modèles en mécanique des fluides, et plus précisément en géophysique (couche limites, modèle de shallow water, fluides en rotation, modèles quasi-géostrophiques). Cela lui donnera l'opportunité de s'ouvrir aux nouveaux modèles météorologiques et climatiques qui sont en fort développement aujourd'hui et de nouer des contacts avec la communauté des géophysiciens.

Bibliographie:

[AWXY15] R. Alexandre, Y. Wang, C.-J. Xu, T. Yang, Well-posedness of the Prandtl equation in Sobolev spaces, *Journal of the American Mathematical Society* 28 (2015), no. 3, pages 745–784.

[CDGG06] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E. Grenier, *Mathematical Geophysics: An introduction to rotating fluids and to the Navier-Stokes equations* (le chapitre 4), Oxford University Press, 2006.

[DDG99] B. Desjardins, E. Dormy, E. Grenier, Stability of mixed Ekman-Hartmann boundary layers, *Nonlinearity*, 12, (1999), no. 2, pages 181–199.

[DDG01] B. Desjardins, E. Dormy, E. Grenier, Instability of Ekman-Hartmann boundary layers, with application to the fluid flow near the core-mantle boundary, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 123-1, (2001), pages 15–27.

[GR96] L. Glangetas, J.-M. Roquejoffre, Bifurcation of travelling waves in the thermodiffusive model for flame propagation. *Archiv. for Rat. Mech. and Anal.* 134 1994 pages 341-402.

[LNX19] W.-X. Li, V.-S. Ngo, C.-J. Xu, Boundary layer analysis for the fast horizontal rotating fluids, *Commun. Math. Sci.* 17 (2019), no. 2, pages 299–338.

[LXY17] C.-J. Liu, F. Xie, T. Yang, Justification of Prandtl Ansatz for MHD boundary layer, arXiv:1704.00523.

[R04] F. Rousset, Large mixed Ekman-Hartmann boundary layers in magnetohydrodynamics, *Nonlinearity* 17 (2004), no. 2, pages 503–518..

[R05] F. Rousset, Stability of Large Amplitude Ekman-Hartmann Boundary Layers in MHD : The Case of Ill-Prepared Data, *Commun. Math. Phys.* 259 (2005), pages 223–256.

[XY18] F. Xie, T. Yang, Global-in-time Stability of 2D MHD boundary Layer in the Prandtl-Hartmann Regime, arXiv:1802.10494.