

SUJETS DE THÈSE PROPOSÉ PAR M. E. H. EL ABDALAOU

M. E. H. EL ABDALAOU**.

*** Université de Rouen Normandie
LMRS UMR 60 85 CNRS
Avenue de l'Université, BP.12
76801 Saint Etienne du Rouvray - France .
e-mail : elhoucein.elabdalaoui@univ-rouen.fr*

1. LA CONJECTURE DE DISJONCTION DE MÖBIUS LA SARNAK POUR LES DENDRITES ET DENDRON.

Le but principal de ce sujet est d'explorer de nouvelles voies techniques pour appréhender dans le cadre des dendrites et dendron la conjecture Sarnak concernant le comportement dynamique de la fonction de Möbius et celle de Liouville.

Un dendrite est un ensemble métrique connexe et compact dans lequel on peut toujours séparer deux points distincts par un troisième point. Autrement dit, si u et v sont deux points distincts alors il existe w et deux voisinages ouverts disjoints U et V de u respectivement v tel que l'ensemble privé de w est une union de U et V . Dans le cadre d'une topologie plus générale l'ensemble est dit dendron. Dans un dendron, on définit aussi l'ordre d'un point comme étant le nombre de composante connexe de l'ensemble privé de ce point. Si l'ordre d'un point est 1 on dit que c'est un point point extrémal. Si l'ordre est 2, le point est dit régulier sinon c'est un point de branchement. Un dendrite est dit de Gehman si l'ensemble des points extrémaux est fermé.

La fonction de Möbius est intimement liée à la fonction de Liouville et cette dernière se définit par 1 si le nombre de facteurs premiers de l'entier est pair et -1 sinon. En fait, sur son support qui est l'ensemble des entiers sans facteur carré, la fonction de Möbius coïncide avec la fonction de Liouville.

Un entier est sans facteur carré si sa décomposition en facteurs premiers ne contient aucun carré. La conjecture de Sarnak affirme que les moyennes statistiques ou les moyennes de Césaro le long de l'orbite d'un point x générée par une transformation d'entropie topologique est nulle et pondérée par la fonction de Möbius converge vers zéro. La recherche actuelle autour de cette conjecture est très active. Pour pouvoir établir cette conjecture, il se trouve qu'il suffit de montrer qu'elle a lieu pour les dendrites de Gehman d'entropie nulle.

Ce sujet est aussi intimement lié à une célèbre conjecture due à Chowla autour du comportement dynamique de la fonction de Liouville. Cette dernière conjecture affirme que la fonction de Liouville est normale, c'est-à-dire, que les fréquences d'équilibre, autrement dit, la fréquence de toute suite finie $(\epsilon_j)_{j=1}^k$, $\epsilon_j = \pm 1$ est $1/2^k$, pour tout $k \geq 1$.

Il s'agit alors d'explorer les travaux réalisés sur les sujets [1], [2], [3] et d'effectuer une synthèse en contribuant avec des nouvelles démonstrations et des investigations nouvelles autour du comportement dynamique de la fonction Möbius par rapport à la classe des systèmes dynamiques générés par les dendrites et dendron.

ENGLISH VERSION : CHOWLA AND SARNAK CONJECTURES ON THE MÖBIUS FLOW.

The main purpose is to investigate the state-of-art and a new directions concerning Sarnak conjecture on the dynamics of the Möbius and Liouville function for the class of dendrites and dendron.

The dendrite is a connected compact metric space X for which for any two distinct points u, v there exist a point w in X such that one can write $X \setminus \{w\}$ as union of U and V with U and V are open disjoint neighborhoods of u and v respectively. If the property holds for a more general topological space, the space is called dendron. For any point x of X , we defined also its *order* as the number of connected component of $X \setminus \{x\}$. If the order is one then the point is called endpoint. If the order is 2, the point is called regular point, if not the branch point. The dendrite is called Gehman dendrite if the set of its endpoints is closed.

The Liouville function is defined as 1 if the number of the prime factor of the integer is even and -1 if not, and the Möbius function coincide with the Liouville function on the subset of squarefree integers. The integer is squarefree if its prime decomposition does not contain any square.

Sarnak's conjecture state that the statistic average or Césaro average along a orbit of any point x with respect to any transformation with topological entropy zero pondered with the Möbius function converge to zero. It is turns out that it is suffice to establish that the conjecture holds for the Gehman dendrites with zero entropy.

This subject is also related to the famous conjecture on the correlations of Liouville function which assert that the Liouville function is a normal, that is, the la frequency of any finite sequence $(\epsilon_j)_{j=1}^k$, $\epsilon_j = \pm 1$ is $1/2^k$, pour tout $k \geq 1$.

Sarnak conjecture has recently attracted very active interest and there are several works on the subject nowadays. But according to the previous result, the main goal is to produce a synthesis on the dynamical and arithmetical view for the class of the dendrites and dendron [1], [2], [3] . Furthermore, to contribute with a new proofs and to explore a new directions as their behavior with respect to the dynamical systems generated by the dendrites and dendron.

REFERENCES

- [1] EL Houcein EL Abdalaoui, Ghassen Askri, Habib Marzougui, Mobius disjointness conjecture for local dendrite maps, *Nonlinearity* 32 (2019), no. 1, 285?300.
- [2] Jian Li, Piotr Oprocha, Guohua Zhang, On dynamics of quasi-graph maps, arXiv:1809.05617v1 [math.DS].
- [3] E. Glasner and M. Megrelishvili, Group actions on treelike compact spaces, *Sci China Math*, 2019, 62, <https://doi.org/10.1007/s11425-018-9488-9>.