Proposition de sujet de mémoire de Master 2ème année
Feuilles mortes

- Encadrant : Pierre Calka
- Lieu : Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, UMR 6085, Université de Rouen Normandie
- Durée : de 4 à 6 mois

Le sujet a trait au domaine de la géométrie aléatoire, c'est-à-dire l'étude de modèles spatiaux aléatoires dans un espace euclidien ou métrique, généralement engendrés par la donnée d'un processus ponctuel. Il est centré sur un modèle en particulier qui est celui des feuilles mortes en dimension 1 et 2 et sur la pré-publication très récente de Mathew Penrose [2] sur le sujet.

Le modèle des feuilles mortes - qu'on appelle aussi parfois modèle des confettis ! - peut se décrire de la manière suivante : des feuilles tombent au hasard sur le sol au fil du temps et les parties visibles de ces feuilles, c'est-à-dire celles qui ne sont pas recouvertes par les feuilles qui arrivent après, constituent une partition aléatoire de l'espace en zones qui ne sont ni convexes ni nécessairement connexes. Les positions des feuilles et temps d'arrivée sont donnés par un processus ponctuel dans l'espace-temps tandis que les formes des feuilles peuvent être déterministes, une boule de rayon fixée par exemple, ou données par une suite de variables aléatoires i.i.d. indépendantes du processus ponctuel précédent.

FIGURE 1 – Simulation du modèle des feuilles mortes avec des boules de rayon 1 (à gauche) et des boules de rayons aléatoires uniformes sur $]0,1[$ (à droite), réalisée par Charles Bordenave, Yann Gousseau et François Roueff [1]

Ce modèle a été utilisé notamment en analyse d'images et science des matériaux. Son étude mathématique demeure largement ouverte. Dans l'article considéré, M. Penrose revient sur le cas de la dimension 1 et étudie en détail le processus ponctuel des bornes des segments visibles en établissant notamment la convergence des covariances ainsi qu'un théorème central limite fonctionnel. Des résultats analogues en dimension 2 sur les frontières des feuilles visibles sont ensuite montrés. Le modèle est enfin étendu au cas où les feuilles sont elle-même des mesures : c'est ce que M. Penrose appelle *les mesures aléatoires des feuilles mortes*. Les techniques utilisées font appel aux propriétés classiques des processus ponctuels de Poisson décrites par exemple dans le chapitre de l'ouvrage de référence [3], ainsi qu'à des théorèmes limites basés notamment sur la notion de graphe de dépendance. Le lien établi avec le problème historique de l'aiguille de Buffon qui remonte au 18ème siècle ajoute à l'attrait de ce travail.

De multiples problèmes ouverts associés au modèle des feuilles mortes pourront être abordés dans un second temps. Citons notamment le calcul de moments de caractéristiques des cellules (volume, aire, nombre de composantes connexes en particulier), leurs lois asymptotiques et tout ce qui concerne les formes en général des parties visibles des feuilles. On pourra également faire le lien avec un modèle assez proche, qui est celui des parkings, et pour lequel peu de choses sont connues à partir de la dimension 2. Des simulations pourront être réalisées à l'aide des logiciels Matlab ou Scilab.

Références

[1] C. Bordenave, Y. Gousseau & F. Roueff (2008). The dead leaves model : a general tessellation modeling occlusion (2006). Adv. in Appl. Probab., **38**, 31–46.

[2] M. Penrose. Leaves on the line and in the plane (2018). Disponible à l'adresse `https://arxiv.org/abs/1806.03696`.

[3] R. Schneider and W. Weil (2008). Stochastic and Integral Geometry, Springer.